Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
11 GIUGNO 2008

Esercizio 1.
(a) Data la funzione

$$f(x) = x \log(1 + \frac{1}{x})$$

determinare: insieme di esistenza e di derivabilità, limiti ed eventuali asintoti, derivata prima, eventuali massimi e minimi. Tracciarne un grafico qualitativo.
b) Verificare se $f(x)$ è uniformemente continua nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
11 GIUGNO 2008

Esercizio 2.
Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan x}dx \qquad , \qquad \int \sqrt{e^x - 1}dx \quad .$$

Fra tutte le primitive di $\sqrt{e^x-1}$ determinare quella che passa per il punto di coordinate $(\log 2, -\frac{\pi}{2})$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
11 GIUGNO 2008

Esercizio 3.
Determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo tale che il seguente limite risulti finito e diverso da 0 e, per tale valore di a, calcolarlo.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - \cos^2 x - x}{e^{ax} - \sqrt{1+x}}$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
11 GIUGNO 2008

Esercizio 4.
Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^{\infty} \frac{(1+e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x}dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\arctan x}}dx$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
11 GIUGNO 2008

Esercizio 5.
a) Sia definita la funzione $f(x)$ nel seguente modo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 + a\log(x+1) & \text{se } x > 0 \\ 3x + 2b & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Discuterne, al variare di a, $b \in \mathbb{R}$, la continuità e la derivabilità.

Esercizio 1

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x + \frac{1}{x} > 0\} = \{x > 0\} \cup \{x < -1\}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} (x + \frac{1}{x})^x = 1$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 1$$

quindi $x = -1$ è asintoto verticale (sinistro) e $y = 1$ è asintoto orizzontale (destro).

$$f'(x) = \log(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}$$

e $f' > 0$ nel suo insieme di definizione, come si può verificare studiando il segno della derivata seconda, infatti:

$$f''(x) = -\frac{1}{x(1+x)^2} > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

quindi f' è crescente in $(-\infty, -1)$ e decrescente in $(0, +\infty)$. D'altra parte, poiché $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ e $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$, segue che $f' > 0\ \forall x$. Quindi $f(x)$ è crescente in tutto il suo dominio (e, visto il comportamento agli estremi, è sempre positiva).

b) f è uniformemente continua in $[0, a]$ essendo $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ un valore finito ed è uniformemente continua in $[a, +\infty)$ perché ammette asintoto orizzontale, quindi f è uniformemente continua in $(0, +\infty)$.

Esercizio 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + \tan x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)}$$

avendo posto $t = \tan x$ (quindi $dx = \frac{1}{1+t^2} dt$). Dall'identità

$$\frac{1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt + C}{1+t^2}$$

si trovano per A, B, C i seguenti valori:

$$A = C = \frac{1}{2} \quad , \quad B = -\frac{1}{2}$$

perciò

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+\tan x} &= \frac{1}{2}[\log(t+1)]_0^1 - \frac{1}{4}[\log(1+t^2)]_0^1 + \frac{1}{2}[\arctan t]_0^1 \\ &= \log 2^{\frac{1}{4}} + \frac{\pi}{8} \quad .\end{aligned}$$

Ponendo $t = \sqrt{e^x - 1}$, $dx = \frac{2t}{t^2+1}$,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x-1}dx = \frac{2t^2}{t^2+1}dt = 2\int \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt \\ = \ 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\sqrt{e^x-1} + c \quad .\end{aligned}$$

Per determinare c, richiedo che

$$2\sqrt{2-1} - 2\arctan\sqrt{2-1} + c = -\frac{\pi}{2}$$

da cui $c = -2$.

Esercizio 3

In un intorno dello 0,

$$\begin{aligned}e^{\sin x} = e^y|_{y=\sin x} = e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)} &= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + o(x^4) \\ \cos^2 x &= 1 - x^2 + +o(x^3) \\ e^{ax} &= 1 + ax + \frac{a^2x^2}{2} + o(x^2) \\ \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

quindi il limite dato è pari a

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{(a-\frac{1}{2})x + (\frac{a^2}{2}+\frac{1}{8})x^2 + o(x^2)} \quad .$$

Questo limite è finito e diverso da 0 se e solo se $a = \frac{1}{2}$, e per quel valore di a vale -8.

Esercizio 4
Sviluppando $\cos x$ al second'ordine in un intorno dello 0, osserviamo che

$$\int_0^\infty \frac{(1+e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x}dx \sim \int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2}dx \sim \int x^{\frac{1}{2}}dx < +\infty \quad .$$

Per quanto riguarda il comportamento all'infinito,

$$\int_1^\infty \frac{(1+e^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x}dx \sim \frac{x^2}{x^{\frac{7}{2}}}dx \sim \int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}dx < +\infty \quad ,$$

dunque il primo integrale converge. (Bisognava verificare anche che non ci fossero altri punti in cui la funzione non è definita, ossia che il denominatore si annulla soltanto per $x = 0$.)

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\arctan x}}dx \sim \frac{1}{\sqrt{x}}dx < +\infty$$

(poiché $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{\arctan x}{x}} = 1$) e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{\arctan x}}dx \leq \frac{1}{x^2}dx < +\infty$$

essendo $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ e dunque anche il secondo integrale converge.

Esercizio 5

Per ogni $x \neq 0$ la funzione è continua e derivabile perché composizione di funzioni derivabili.
Continuità in 0:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2} = f(0) = 2b$$

da cui $b = \frac{1}{4}$ e $a \in \mathbb{R}$.
Derivabilità in 0:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{2}e^{2h} - \frac{1}{2}h^2 + a\log(1+h) - \frac{1}{2}}{h} = 1+a$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

(avendo usato i limiti notevoli

$$\frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\log(1+h)}{h} = 1)$$

quindi f è derivabile in 0 se e solo se $a = 2$ e $b = \frac{1}{4}$.