Cognome e nome ____________________

APPELLO A DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
4 LUGLIO 2008

Esercizio 1.
(a) Data la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{x-1}{x}}$$

determinare: insieme di esistenza e di derivabilità, limiti ed eventuali asintoti, derivata prima, eventuali massimi e minimi. Tracciarne un grafico qualitativo.

(b) Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle x e dalla funzione $g(x) = \frac{1}{x} \cdot f(x)$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO B DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
4 LUGLIO 2008

Esercizio 2.
Fra tutti i triangoli rettangoli di area fissata, trovare quello con l'ipotenusa minore.

Cognome e nome ____________________

APPELLO B DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
4 LUGLIO 2008

Esercizio 3.
Discutere, al variare di $\alpha \geq 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$, la convergenza del seguente integrale:

$$\int_0^1 (e^{x^\alpha}(\cot x)^\beta - (\cot x)^\beta)dx$$

Cognome e nome ____________________

APPELLO B DI AM1C - SESSIONE ESTIVA -
4 LUGLIO 2008

Esercizio 4.
Calcolare i seguenti integrali:

$$\text{(a)} \qquad \int_0^2 \log(\frac{x^2+2}{x+1})dx$$

$$\text{(b)} \qquad F_\alpha(x) = \int_1^2 \frac{1}{\alpha x\sqrt{1-\log^2 x}}dx$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare poi α in modo tale che $F_\alpha(x) = 1$.

Cognome e nome ____________________

APPELLO B DI AM1C - SESSIONE ESTIVA - 4 LUGLIO 2008

Esercizio 5.
Calcolare i seguenti limiti:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{-t^2} - \cos^2 t)dt}{x^2 - \sin^2 x}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{e}}}{x^2}$$

SOLUZIONI

Esercizio 1.

(a) Dom(f) $= \{x \neq 0\}$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{y\to +\infty} \frac{ey}{e^y} = 0$$

f ammette asintoto verticale da sinistra (la retta $x = 0$.)

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$$

quindi f ammette asintoto orizzontale a $\pm\infty$ (la retta $y = 0$).

$$f'(x) = e^{\frac{x-1}{x}}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$\mathrm{Dom}(f') = \mathrm{Dom}(f)$$

$$f' = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Dallo studio del segno di f' in un intorno di 1 risulta che 1 è punto di massimo. Inoltre $f' < 0$ $\forall x < 0$ e $\forall x > 1$. Dunque f decresce in quegli intervalli, cresce in $(0, 1)$.

(b) Sia $g(x) = \frac{1}{x} \cdot f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{x-1}{x}}$.

In $[1, 2]$ $g(x) > 0$, quindi l'area cercata è data dal seguente integrale:

$$\int_1^2 g(x)dx = [e^{\frac{x-1}{x}}]_1^2 = \sqrt{e} - 1$$

(integrale immediato, perchè $g(x) = h'(x)e^{h(x)}$, con $h(x) = \frac{x-1}{x}$.)

Esercizio 2.

Siano a, x i cateti e y l'ipotenusa del triangolo cercato. Dalla relazione:

$$A = \frac{ax}{2} \quad ,$$

usando il teorema di Pitagora, possiamo scrivere

$$y(x) = \sqrt{\frac{4A^2 + x^4}{x^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{4A^2 + x^4} \quad .$$

$$y' = \frac{-4A^2 + x^4}{x^2\sqrt{4A^2 + x^4}} = 0$$

se e solo se

$$x^4 - 4A^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2A}$$

e

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2A}$$

quindi $x = \sqrt{2A}$ è un punto di minimo per la funzione $y(x)$ e cioè, fra tutti i triangoli rettangoli di area data quello con ipotenusa minore è il triangolo isoscele ($a = x = \sqrt{2A}$).

Esercizio 3.

Se $\alpha = 0$ l'integrale dato va come

$$\int_0^1 (\cot x)^\beta dx \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$$

che converge se e solo se $\beta < 1$.
Se $\alpha > 0$:

$$\int_0^1 (e^{x^\alpha} \cot^\beta x - \cot^\beta x)dx =$$
$$\int_0^1 \frac{e^{x^\alpha - 1}}{x^\alpha} x^\alpha \cot^\beta x dx$$
$$\sim \int_0^1 x^\alpha (\cot x)^\beta dx$$
$$\sim \int_0^1 x^\alpha \frac{1}{x^\beta} dx$$

avendo prima usato il limite notevole

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$$

vero per ogni f tale che $f(x) \to 0$ per $x \to 0$ e poi scritto $\cot^\beta x$ all'ordine più alto ($\cot x \sim \frac{1}{x}$ in un intorno dello 0).

$$\int_0^1 x^{\alpha-\beta} < +\infty \Leftrightarrow \alpha - \beta > -1$$

in definitiva l'integrale converge per ogni $\alpha \geq 0$, se e solo se $\beta < \alpha + 1$.

Esercizio 4.

(a) Per parti:

$$\int_0^2 \log(\frac{x^2+2}{x+1})dx = x\log(\frac{x^2+2}{x+1})\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^3+2x^2-2x}{(x+1)(x^2+2)}dx$$

Dividendo il numeratore per il denominatore:

$$\frac{x^3+2x^2-2x}{(x+1)(x^2+2)} = 1 + \frac{x^2-4x-2}{(x+1)(x^2+2)}$$

cerco A, B e C tali che

$$\frac{x^2-2}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

cioè

$$A = 1 \quad , \qquad B = 0 \quad , \qquad C = -4$$

da cui

$$\int_0^2 \log(\frac{x^2+2}{x+1})dx = x\log(\frac{x^2+2}{x+1})\Big|_0^2 - \Big(\int_0^2 dx + \int_0^2 \frac{dx}{x+1} + 4\int_0^2 \frac{1}{x^2+2}dx\Big) \quad .$$

L'integrale dato è pari a

$$\log\frac{4}{3} - 2 + 2\sqrt{2}\arctan\sqrt{2} \quad .$$

(b) Con la sosituzione $t = \log x$,

$$F_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\log 2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\alpha}\arcsin t\Big|_0^{\log 2} = \frac{1}{\alpha}\arcsin(\log 2)$$

e

$$F_\alpha(x) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\arcsin(\log 2)} \quad .$$

Esercizio 5.

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (e^{-t^2} - \cos^2 t)dt}{x^2 - \sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos^2 x}{2x - 2\sin x \cos x}$$

avendo usato il teorema di De l'Hospital ed il teorema fondamentale del calcolo integrale. Scrivendo gli sviluppi di Taylor centrati in 0 di e^{-x^2}, $\cos x$ e $\sin x$, dobbiamo risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{5}{6}x^4 + o(x^4)}{\frac{5}{6}x^3 + o(x^4)} = 0 \quad ,$$

essendo:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^5)$$
$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^5)$$
$$\sin x \cos x = x - \frac{5}{6}x^3 + o(x^4) \quad .$$

(b)

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\log(\cos x)}$$

quindi:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{e}}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4})} - e^{-\frac{1}{2}}}{x^2}$$

essendo

$$\log(\cos x) = \log(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)$$

Dunque bisogna calcolare il limite seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{x^2}{8}} - 1)}{x^2}$$

che risulta essere uguale a $\frac{\sqrt{e}}{8}$. (Si risolve con il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$$

con $f(x) = \frac{x^2}{8}$).