Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

GE4 - Geometria Differenziale 1

Tutorato IX - Livia Corsi e Gabriele Nocco (06-12-06)

Esercizio 1. Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ e sia $v \in S^1 \subset T_p\Sigma$ un vettore unitario i.e. $v = \cos\theta e_1 + \sin\theta e_2$, dove e_1, $e_2 \in T_p\Sigma$ sono le direzioni principali nel punto p. Calcolare gli zeri della seconda forma quadratica:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi) & \longrightarrow & [-k_2, -k_1] \\ & \theta & \longmapsto & -k_1\cos^2\theta - k_2\sin^2\theta \end{array}$$

che da la curvatura normale per ogni vettore $v \in T_p\Sigma$. Gli zeri di f sono detti *direzioni asintotiche*. Dimostrare inoltre che si hanno:

1. Zero direzioni asintotiche se e solo se il punto p è ellittico.
2. Una direzione asintotica se e solo se il punto è parabolico
3. Due direzioni asintotiche se e solo se il punto è iperbolico
4. Infinite direzioni asintotiche se e solo se il punto è planare

Definizione: *Una superficie Σ si dice rigata se $\forall\, p \in \Sigma$ passa una retta r tutta contenuta in Σ.*

Esercizio 2. Mostrare che il cilindro $\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$ è una superficie rigata.

Esercizio 3. Usando il risultato del primo esercizio, dimostrare che se Σ è una superficie rigata allora non ha punti ellittici.

Esercizio 4. Verificare che l'iperboloide a una falda $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ è una superficie rigata nella seguente maniera: considerare le seguenti coordinate locali su Σ:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & (-\pi,\pi)\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \Sigma \\ & (u, v) & \longmapsto & (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v) \end{array}$$

Sia $\gamma(u) = \phi(u, 0) = (\cos u, \sin u, 0)$ il cerchio unitario, per ogni $u = u_0$ fisato e al variare di $v \in \mathbb{R}$ la curva $\phi(u_0, v) \subset \Sigma$ è la retta che passa per il punto $\gamma(u_0) \in \mathbb{R}^3$ nella direzione del vettore $\dot\gamma(u_0) + \vec{k}$ è quindi tutta contenuta in Σ.

Mostrare che inoltre Σ è doppiamente rigata perché contiene anche tutte le rette per $\gamma(u_0)$ nella direzione di $-\dot\gamma(u_0) + \vec{k}$. Infine usare questa proprietà geometrica per dimostrare che Σ ha Curvatura di Gauss strettamente negativa.