Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

GE4 - Geometria Differenziale 1

Tutorato VII - Livia Corsi e Gabriele Nocco (02-11-06)

<u>Esercizio 1.</u> Dimostrare che l'Elicoide, cioè la superficie (Do Carmo, es.3 p.94)

$$X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & (v\cos u, v\sin u, u) \end{array}$$

è ua superficie Minima, cioè la sua curvatura Media è costante e uguale a zero.
Notare che l'Elicoide NON è una superficie di rotazione. Come sono fatte le curve d'intersezione con i piani orizzontali?

<u>Esercizio 2.</u> Dimostrare che l'Iperboloide a una falda (Do Carmo, p.189 fig.3-34) cioè la superficie $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ ha solo punti iperbolici. (*Per questo viene anche chiamato Iperboloide iperbolico*)

<u>Esercizio 3.</u> Calcolare la curvatura di Gauss del Toro di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la circonferenza contenuta nel piano xz di centro il punto $(3,0)$ e raggio 1, i.e. la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = 1 - (\sqrt{x^2+y^2} - 3)^2\}$ Notare che il parallelo inferiore e il parallelo superiore sono costituiti da punti parabolici. Notare inoltre che ci sono sia punti ellittici che iperolici e identificarli.

<u>Esercizio 4.</u> Il Nastro di Möbius è dato da $Im(\overline{X})$ con

$$\overline{X} : \begin{array}{ccc} [-\pi,\pi] \times (-1,1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & X(u,v) \end{array}$$

dove

$$\overline{X}(u,v) = \left(\cos u \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right), \sin u \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right), v\sin\frac{u}{2}\right)$$

Osservare che $\overline{X}$ non è una carta locale non essendo iniettiva, mentre una carta locale sul nastro di Möbius è data da

$$X := \quad \overline{X}\Big|_{(-\pi,\pi)\times(-1,1)}$$

Mostrare che $N(-\pi,v) \neq N(\pi,v)$ i.e. si tratta di una superficie non-orientabile. Dimostrare inoltre che la curvatura di Gauss è ben definita i.e. $K(-\pi,v) = K(\pi,v)$