Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2006/2007

GE4 - Geometria Differenziale 1

Tutorato V - Livia Corsi e Gabriele Nocco (25-10-06)

Esercizio 1. (Do Carmo, p. 80 es 7) Dimostrare che la relazione "S_1 è diffeomorfa ad S_2" è una relazione d'equivalenza sull'insieme delle superfici regolari.

Esercizio 2. Sia $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sfera unitaria e sia $A : S^2 \longrightarrow S^2$ l'applicazione antipodale, ovvero $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Mostrare che A è un diffeomorfismo.

Esercizio 3. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare e sia $d : S \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $d(p) = |p - p_0|$, dove $p \in S$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $p_0 \notin S$; cioè d è la distanza di p da un punto fissato p_0 non in S. Mostrare che d è differenziabile.

Esercizio 4. Mostrare che il catenoide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \cosh^2 z\}$ è diffeomorfo al cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$, esibendo un diffeomorfismo.

Esercizio 5. Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ fissati, sia

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

l'equazione di un'elica che al variare di $t \in \mathbb{R}$ si avvolge sul cilindro circolare retto in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x^2 + y^2 = a^2$.

1. Calcolare curvatura e torsione della curva $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^3$ e osservare che non dipendono da t.
2. Dimostrare che una curva in $\mathbb{R}^3$ ha curvatura e torsione costanti se e solo se è contenuta in una retta, in un cerchio o in un'elica cilindrica.

Esercizio 6. Quali delle seguenti applicazioni $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sono carta locale (parametrizzazione) di una superficie regolare? Giustificare attentamente.

1. $\mathbf{X}(u, v) = (u, uv, v)$
2. $\mathbf{X}(u, v) = (u^2, u^3, v)$
3. $\mathbf{X}(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$