GE2 - Tutorato II

Chiara Del Vescovo

25 ottobre 2006

DEF.: Data una matrice $A \in \mathcal{M}(\mathrm{n}\times\mathrm{n})$, definiamo, al variare di $i = 1, \ldots, n$, il valore $\alpha_i := |(A(1, \ldots, i|1, \ldots, i))|$, sottomatrice di A. Gli n scalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n = |A|$ sono detti MINORI PRINCIPALI DI A.

TEOREMA (DI JACOBI-SYLVESTER): Sia b una forma bilineare simmetrica su V spazio vettoriale n-dimensionale. Sia $\mathbb{E}$ una base di V e sia A la matrice di b rispetto ad $\mathbb{E}$. Risulta: A è definita positiva (e quindi b è un prodotto scalare) $\iff$ gli n minori principali di A sono positivi (cioè $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$.

ESERCIZI:

1. Sia b_a la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$, definita, rispetto ad una base $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_4)$ dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2a+1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare per quali valori di a si ha che b_a è un prodotto scalare;

   (b) Posto $a = -1$, determinare l'equazione del cono $b_{-1}-$isotropo, e una base di $\mathbb{R}^4$ composta di vettori isotropi;

   (c) Posto $a = -1/2$, calcolare la segnatura di b;

   (d) Posto $a = 1/2$, determinare una base diagonalizzante per $b_{1/2}$ che sia ortonormale rispetto al prodotto scalare standard;

   (e) Posto $a = 2$, ortonormalizzare (rispetto a b_2) la base $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^4$.

2. In $\mathbb{R}^2$ è assegnato, rispetto alla base canonica $\mathbb{E} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2)$, il prodotto scalare b avente matrice:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare una base $\mathbb{F}$ b-ortonormale;

(b) b-ortonormalizzare i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ con l'algoritmo di Gram-Schmidt sia in base $\mathbb{E}$ che in base $\mathbb{F}$.

3. Sia $b = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_4$ una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^4$ definita rispetto alla base $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}$ Sia U l'iperpiano di $\mathbb{R}^4$ avente equazione $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$.

   (a) Verificare che b è un prodotto scalare;

   (b) Determinare un generatore e le equazioni cartesiane di $U^\perp$;

   (c) Scrivere il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ come somma di un vettore di U e di un vettore in $U^\perp$.

4. Dimostrare il teorema di Jacobi-Sylvester.