AM3 Professore Esposito

Tutorato II del $16-03-2007$

Tutore: Alessandro Masi [1]

http://matematica3.altervista.org/index.html

Esercizio 1

Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tale che $f(x,y)=\begin{cases} 1-|(x,y)|^2 & \text{se}|(x,y)|\le 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$
Discutere la regolaritá di f su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2
Sia

$$\begin{array}{llcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) \to (sen(xy), e^{xy^2}) & & \end{array}$$

1. Usando la definizione mostrare che f é differenziabile in $(0,0)$.
2. Sia

   $$\begin{array}{llcl} g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \tau & \to cos(\pi-\tau) & \end{array}$$

   e si definisca $F(\tau)=f(g(\tau),1-g^2(\tau))$ e si calcoli $F'(0)$.

Esercizio 3

Sia X lo spazio normato $(C[0,1],||\ ||_\infty)$ dove $\forall f\in(C[0,1])$,
$||f||_\infty:=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$

1. Mostrare che la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ cosí definita:

   $$f_n(x)=e^{\frac{1+x^2}{n^3}}\cdot n^3$$

   é convergente in X.
2. Mostrare che esiste $\{f_n\}\subset X$ di Cauchy in X ma che non é convergente in X.

Esercizio 4

Sia $\{x^{(n)}\}\subseteq l_p$
$x^{(n)}=(0,0,\cdots,\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}),\sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}}),\cdots,\sin(\frac{1}{\sqrt{2n}}),0,0,\cdots)$

[1] Gnoccographyc

dove i termini non nulli vanno dal posto $n - esimo$ al posto $2n - esimo$.
Formalizzando $\forall n$ si ha:

$$x_k^n = \begin{cases} \sin(\frac{1}{\sqrt{k}}) & \text{se } k \in \{n, \cdots, 2n\} \\ o & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per quali $p \geq 1$ si ha che $x^{(n)}$ converge in l_p ?

Esercizio 5

Sia $\{x^{(n)}\} \subseteq l_p$

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \log(\frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}) & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases}$$

Per queli $p \geq 1$ si ha che $x^{(n)}$ converge in l_p in $|| \, ||_p$?