I Esonero di AM3 - 13/4/2007

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

1) Sia γ la curva descritta in coordinate polari da $\rho = \theta^2$, $\theta \in [0, \frac{2}{3}]$. Calcolare:
a) la lunghezza di γ;
b) l'integrale curvilineo $\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2} ds$.

2) Sia

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z \sin x(\cos y - 1)}{1 - \cos x + y^2 + \sin^2 z} & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

(a) Provare continuitá ed eventualmente differenziabilitá di $f(x, y, z)$ in $P = (0, 0, 0)$.
(b) Provare o confutare l'affermazione $f \in C^1(P)$.
(c) Calcolare il gradiente in $(0, 0, 0)$ e discutere la regolaritá C^1 in P della funzione

$$g(x, y, z) = \begin{cases} \frac{e^{f(x,y,z)} - 1}{f(x,y,z)} & \text{se } f(x, y, z) \neq 0 \\ 1 & \text{se } f(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

3) Sia

$$F(x, y, z) = (y + 1) \sin x + z \cos y + e^z \ln(1 + x).$$

(a) Rappresentare come grafico di un'opportuna funzione g l'insieme $\{F = 0\}$ localmente in $p_0 = (0, 0, 0)$, fornendo un esempio esplicito di intorno di p_0 per cui tale rappresentazione valga.
(b) Trovare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine della funzione g rispetto a zero.

4) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy + \frac{1}{2} \sin(xy) > \pi\}$ e $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$. Allora
a) discutere se l'insieme A è compatto oppure no;
b) calcolare, qualora esista, $\lim\limits_{|(x,y)| \to +\infty} f(x, y)$;
c) giustificando accuratamente, determinare estremo inferiore/superiore di $f(x, y)$ in A ed eventuali punti di minimo/massimo assoluto.

(Sugg: la funzione $g(t) = t + \frac{1}{2} \sin t$ è monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e $g(\pi) = \pi$.)