AM2 2006-2007: RECUPERO II ESONERO

TEMA 1. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$. Provare che

$f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad f$ é differenziabile in u.

TEMA 2. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $\gamma \in C^1([0,1], \mathbf{R}^n)$. Provare che

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \; = < \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) >$$

Siano $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $g \in C^1(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$. Provare che $g \circ f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$

e

$$J_{g \circ f}(x) \quad = \quad J_g(f(x)) J_f(x)$$

TEMA 3. Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Provare che:

$$f(u+h) \; = \; f(u) + \; < \nabla f(u) \, , \, h > \; + \frac{1}{2} < H_f(u) \, h, \; h > \; + \; \circ \, (||h||^2)$$

TEMA 4. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Sia $f(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) \neq 0$. Provare che

$$\exists \delta > 0, \; \exists \sigma > 0, \exists \, \varphi \in C^1((-\delta, \delta), (-\sigma, \sigma)) :$$
$$f(x,y) \; = \; 0, \quad (x,y) \in (-\delta, \delta) \times (-\sigma, \sigma) \qquad \Leftrightarrow \qquad y \; = \; \varphi(x)$$

TEMA 5. Sia (X, d) spazio metrico completo, $T : X \to X$ contrazione. Provare che T ha un punto fisso.

Applicare quindi il Teorema delle Contrazioni per provare il Teorema di esistenza ed unicitá locale per il problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \qquad x(0) = x_0$$

ove $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ e $x_0 \in \mathbf{R}^n$ sono dati.

ESERCIZIO 1

Sia $\quad f(x,y) = \int\limits_{x^2}^{y} e^{-t^2} dt.$

Calcolare massimo e minimo valore di f in $\quad \{(x,y): \quad x^2+y^2 \leq 1\}.$

ESERCIZIO 2

Sia $\quad f(x,y) = (x^2-y^2)^2(y-\sqrt{x}) \qquad .$

Determinare i punti stazionari di f e determinare tra questi i punti di minimo o massimo locale.

ESERCIZIO 3

Sia f come nell'esercizio 2.

Dire, giustificando la risposta, per quali $c \in \mathbf{R}$ l'insieme di livello $\Gamma_c = \{(x,y): f(x,y) = c\}$ é, localmente, grafico cartesiano.

Provare poi, utilizzando il Teorema del Dini, che Γ_0 ha retta tangente nel punto $(4,2)$ e scrivere la retta tangente a Γ_0 in tale punto.

Provare infine, utilizzando il Teorema del Dini, che Γ_9 ammette vettore normale in $(1,2)$ e calcolarlo.

ESERCIZIO 4

Sia $f(x,y,z) = \frac{x^2 y^{\frac{6}{7}} z}{x^4+z^2+y^4}, \quad , f(0,0,0) = 0.$

Calcolare, se esistono, le derivate parziali, le derivate direzionali, il differenziale di f in $(0,0,0)$.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 $\nabla f(x,y) = (-2xe^{-x^4}, e^{-y^2})$ non é mai nullo, e quindi f raggiunge il suo massimo e minimo valore sulla frontiera $\{(x,y): \quad x^2+y^2=1\}$ in punti che debbono soddisfare il sistema Lagrangiano

$$-2xe^{-x^4} = 2\lambda x, \quad e^{-y^2} = 2\lambda y, \quad x^2+y^2=1$$

Una prima soluzione é $(0,\pm 1)$ cui corrispondono i valori $\int_0^1 e^{-t^2}dt, \quad -\int_0^1 e^{-t^2}dt$. Se $x \neq 0$, deve essere $\frac{e^{-y^2}}{2y} = \lambda = -e^{-x^4} = -e^{-(1-y^2)^2}$ ovvero $-2ye^{-y^4+3y^2-1} = 1$ Tale equazione ha esattamente due soluzioni (necessariamente negative) perché, come si vede subito, $(-2ye^{-y^4+3y^2-1})' = -2e^{-y^4+3y^2-1}(1+6y^2-4y^4) = 0$ se e solo se $y = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}}$ e dunque $y \to -2ye^{-y^4+3y^2-1}$ é strettamente crescente tra $-\infty$ e $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}}$ ed é strettamente decrescente tra $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}}$ e $y=0$. Siccome $-\sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{4}} < -1$ e , in $y=-1$, $-2ye^{-y^4+3y^2-1}$ vale $2e > 1$, concludiamo che vi é esattamente una soluzione $\underline{y} \in (-1,0)$ cui corrispondono due punti stazionari (vincolati) $(\pm\sqrt{1-\underline{y}^2}, \underline{y})$. La natura di tali punti si stabilisce piú facilmente studiando direttamente la funzione vincolata $y \to \int_{1-y^2}^{y} e^{-t^2}dt$ la cui derivata, data da $e^{-y^2}[1+2ye^{-y^4+3y^2-1}]$ ha esattamente lo zero $\underline{y}$ in $(-1,1)$, che é, come si vede subito, un punto di minimo. Concludiamo quindi che

$(0,-1)$ é punto di massimo relativo sul bordo
$(0,1)$ é punto di massimo assoluto
$((\pm\sqrt{1-\underline{y}^2}, \underline{y})$ sono punti di minimo assoluto

($(0,-1)$ non é massimo locale in $\{ \quad x^2+y^2 \leq 1\}$ perché $f_y(0,y) > 0 \forall y$)

ESERCIZIO 2 $f(x,y) = (x^2-y^2)^2(y-\sqrt{x}) \qquad \Rightarrow$

$$\nabla f = \left(4x(x^2-y^2)(y-\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-y^2)^2,\ -4y(x^2-y^2)(y-\sqrt{x}) + (x^2-y^2)^2\right) =$$

$$= (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x(y-\sqrt{x})(x^2-y^2) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2-y^2)^2, \quad 4y(y-\sqrt{x})(x^2-y^2) = (x^2-y^2)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2-y^2=0 \quad \text{oppure} \quad 8x\sqrt{x}(y-\sqrt{x}) = (x^2-y^2), \quad (x^2-y^2) = 4y(y-\sqrt{x}) \quad \Leftrightarrow$$

$x = 0 = y$ oppure $2x\sqrt{x} = y$. La soluzione $(0,0)$ é giá inclusa nell'insieme $\{x^2 - y^2 = 0\}$. A queste soluzioni vanno dunque aggiunte le soluzioni del sistema $2x\sqrt{x} = y, \quad (x^2 - y^2) = 4y(y - \sqrt{x})$ che fornisce $x = \frac{9}{20} \quad y = \frac{27\sqrt{20}}{200}$. Dunque i punti stazionari sono

i punti delle due semirette $x + y = 0, \quad x \geq 0$ e $x - y = 0, \quad x \geq 0$
ed il punto $(\frac{9}{20}, \frac{27\sqrt{20}}{200})$.

Nella regione $\{y > \sqrt{x}\}$ i punti in $\{x^2 = y^2\}$ sono tutti di minimo, perché sono zeri di f che é non negativa in tale regione, mentre nella regione $\{y < \sqrt{x}\}$ i punti in $\{x^2 = y^2\}$ sono tutti di massimo, perché sono zeri di una funzione non positiva. I punti $(1,1)$ e $(0,0)$, intersezioni tra le rette $x^2 - y^2 = 0$ e la porzione di parabola $y = \sqrt{x}$ non sono né massimi né minimi perché sono zeri di f ed f cambia segno attorno a tali punti. Infine il punto $(\frac{9}{20}, \frac{27\sqrt{20}}{200})$ appartiene alla regione $\{y < \sqrt{x}\} \cap \{y > x\}$ ed in tale regione f é negativa mentre sul bordo f é nulla: possiamo concludere che si tratta di un punto di minimo.

ESERCIZIO 3 Sia f come nell'esercizio 2. Dire, giustificando la risposta, per quali $c \in \mathbf{R}$ l'insieme di livello $\Gamma_c = \{(x,y) : \quad f(x,y) = c\}$ é, localmente, grafico cartesiano.

I valori cririci di f, cioé i valori di f nei suoi punti critici, sono 0 e $f(\frac{9}{20}, \frac{27\sqrt{20}}{200})$. In altre parole non vi sono punti critici di f a livello c, cioé non ci sono punti critici di f in Γ_c se e solo se $c \neq 0, f(\frac{9}{20}, \frac{27\sqrt{20}}{200})$. Per il Teorema del Dini, Γ_c é localmente attorno ad ogni suo punto un grafico cartesiano se e solo se $c \neq 0, f(\frac{9}{20}, \frac{27\sqrt{20}}{200})$.

Siccome $f(4,2) = 0$, $(4,2) \in \Gamma_0$. Inoltre, localmente attorno a $(4,2)$ Γ_1 é il grafico di $y = \sqrt{x}$.

Siccome $f(1,2) = 9$, $(1,2) \in \Gamma_9$. . Siccome, dal teorema del Dini segue che $(1, -\frac{f_x(1,2)}{f_y(1,2)})$ é vettore tangente a Γ_9 in $(1,2)$ $\nabla f(1,2)$ é vettore normale a Γ_9 in $(1,2)$.

ESERCIZIO 4 Siccome $f(x,y,z) = \frac{x^2yz^{\frac{2}{3}})}{x^4+y^2+z^4}$, $, f(0,0,0) = 0$ é nulla lungo gli assi coordinati, le derivate parziali in f_x, f_y, f_z sono tutte nulle in $(0,0,0)$. Poi, $\frac{1}{t}f(tx,ty,tz) = t^{\frac{2}{3}}\frac{x^2yz^{\frac{2}{3}})}{t^2x^4+y^2+t^2z^4} \to_{t\to 0} 0$, le derivate direzionali in $(0,0,0)$ sono tutte nulle.

Infine, siccome le derivate perziali in zero sono tutte nulle, differenziabilitá in zero equivale a dire che $\frac{x^2yz^{\frac{2}{3}})}{(x^4+y^2+z^4)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ tende a zero quando $x^2 + y^2 + z^2$ tende a zero. Ma , calcolando tale quoziente in (x, x^2, x) troviamo $\frac{x^{\frac{2}{3}})}{3\sqrt{2x^2+x^4}}$ che va all'infinito al tendere di x a zero: f non é differenziabile nell'origine.