Esonero 2 - MF1

A.A. 2005/2006

1. Si consideri un modello di mercato binomiale uniperiodale (S_t, B_t), dove S_t è il titolo rischioso e B_t quello non rischioso, $t = 0, 1$, caratterizzato da un tasso privo di rischio r e sia $\Phi(S_1)$ il payoff finale di un certo derivato presente nel mercato. Avendo un capitale iniziale pari a V_0 € e indicando con π_t il valore del derivato al tempo t

- determinare un portafoglio (x, y) formato dal titolo e dal derivato stesso che sia privo di rischio;
- determinare il premio del derivato;
- estendendo il modello a 2 periodi, $t = 0, 1, 2$, calcolare il valore di un'opzione put con $u = 1.3$, $d = 0.8$, $r = 0.05$, $S_0 = 10$, $K = 11$.

2. Determinare il valore al tempo t dell'opzione caratterizzata dal seguente payoff al tempo finale T (opzione *Assett-or-Nothing*)

$$\Phi(S_T) = \begin{cases} S_T & S_T > K \\ 0 & S_T \leq K \end{cases}, \quad K > 0, \tag{1}$$

nell'ambito del modello Black-Scholes, con tasso privo di rischio r e volatilità σ.

Cosa accade per $T \to +\infty$?

Soluzioni Esonero - MF1

A.A. 2005/2006

1. Il valore del portafoglio x, y è

$$V_t = x\pi_t + yS_t, \quad t = 0, 1.$$

Affinchè tale portafoglio sia privo di rischio deve essere $V_1 = (1+r)V_0$, cioè

$$(1+r)V_0 = x\pi_t + yS_t = \begin{cases} x\Phi(S^+) + yS^+ \\ x\Phi(S^-) + yS^-. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema rispetto a x e y, otteniamo

$$\begin{cases} x^* = & \frac{(1+r)V_0(S^+ - S^-)}{S^+\Phi(S^-) - S^-\Phi(S^+)} \\ y^* = & \frac{(1+r)V_0(\Phi(S^-) - \Phi(S^+))}{S^+\Phi(S^-) - S^-\Phi(S^+)} \end{cases}$$

Dall'equazione $V_0 = x^*\pi_0 + y^*S_0$ e poichè $S^+ = uS_0$, $S^- = dS_0$ si ha dunque (con qualche conto)

$$\pi_0 = (V_0 - y^*S_0)/x^* = \frac{1}{1+r}\left(\Phi(S^+)\frac{(1+r)-d}{u-d} + \Phi(S^-)\frac{u-(1+r)}{u-d}\right).$$

Nel caso considerato, la condizione di assenza di opportunità di arbitraggio è verificata ($0.8 < 1.05 < 1.3$) e inoltre $p^* = 0.5$. Si ha quindi $c^{++} = \max\{K - S^{++}, 0\} = 0$, $c^{+-} = \max\{K - S^{+-}, 0\} = 0.6$, $c^{--} = \max\{K - S^{--}, 0\} = 4.6$, da cui $c^+ = (p^*c^{++} + (1-p^*)c^{+-})/(1+r) = 0,2857$, $c^- = 1,7333$ che implica infine $c_0 = 0.9614$ €.

2. Nel modello Black-Scholes la variabile S_T al tempo t è

$$S_T = S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Z},$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dunque

$$\Pi(t, S_t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[S_T\mathbb{I}_{\{S_T>K\}}] = e^{-r(T-t)}S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)}\mathbb{E}[e^{\sigma\sqrt{T-t}Z}\mathbb{I}_{\{S_T>K\}}].$$

Calcoliamo il valore atteso:

$$\mathbb{E}[e^{\sigma\sqrt{T-t}Z}\mathbb{I}_{\{S_T>K\}}] = \mathbb{E}[e^{\sigma\sqrt{T-t}Z}\mathbb{I}_{\{Z>(\log(K/S_t)-(r-\sigma^2/2)(T-t))/(\sigma\sqrt{T-t})\}}] =$$

$$= \int_d^{+\infty} e^{\sigma\sqrt{T-t}z}e^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}dz \qquad (*)$$

dove $d = (\log(K/S_t) - (r - \sigma^2/2)(T-t))/(\sigma\sqrt{T-t})$,

$$(*) = e^{\sigma^2(T-t)/2} \int_d^{+\infty} e^{-(z-\sigma\sqrt{T-t})^2/2}/\sqrt{2\pi}dz = e^{\sigma^2(T-t)/2} \int_{d-\sigma\sqrt{T-t}}^{+\infty} e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}dx =$$

$$= 1 - N(d - \sigma\sqrt{T-t}) = N(\sigma\sqrt{T-t} - d).$$

Quindi

$$\Pi(t, S_t) = e^{-r(T-t)} S_t e^{(r-\sigma^2/2)(T-t)} N(\sigma\sqrt{T-t} - d) = S_t N(\delta),$$

dove

$$\begin{aligned} \delta &= \sigma\sqrt{T-t} - (\log(K/S_t) - (r - \sigma^2/2)(T-t))/(\sigma\sqrt{T-t}) \\ &= (\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t))/(\sigma\sqrt{T-t}). \end{aligned}$$