Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2005/2006

GE4 - Geometria Differenziale 1

TUTORATO IV - FEDERICO COGLITORE E LIVIA CORSI (12-10-05)

ESERCIZIO 1. (Do Carmo, p. 67 es. 16) Un modo di definire un sistema di coordinate per la sfera S^2, data da $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$, è di considerare la cosiddetta *p*roiezione stereografica:

$$\pi : S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

che manda un punto $p = (x, y, z)$ della sfera S^2 meno il polo nord $N = (0, 0, 2)$ nell'intersezione del piano xy con la retta che congiunge N con p. Sia $(u, v) = \pi(x, y, z)$, dove $(x, y, z) \in S^2 - \{N\}$ e $(u, v) \in \{z = 0\}$.

1. Mostrare che $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$ è data da

$$\begin{cases} x = \frac{4u}{u^2+v^2+4} \\ \\ y = \frac{4v}{u^2+v^2+4} \\ \\ z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} \end{cases}$$

2. Mostrare che è possibile, usando la proiezione stereografica, ricoprire la sfera con due carte locali.

ESERCIZIO 2. (Do Carmo, p. 66 es. 7) Sia $f(x, y, z) = (x + y + z - 1)^2$.

1. Trovare i punti critici e i valori critici di f.
2. Per quali valori di c, l'insieme $f(x, y, z) = c$ è una superficie regolare?
3. Rispondere ai punti precedenti per la funzione $f(x, y, z) = xyz^2$.

ESERCIZIO 3. (Do Carmo, p.65 es. 1) Mostrare che il cilindro dato da $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ è una superficie regolare e determinare un atlante di carte locali che lo ricoprano.

ESERCIZIO 4. (Do Carmo, p. 65 es. 4) Sia $f(x, y, z) = z^2$. Mostrare che 0 non è un valore regolare di f ma $f^{-1}(0)$ è una superficie regolare.

<u>Esercizio 5.</u> (Do Carmo, p. 65 es. 5) Sia $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ (un piano) e sia $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data da

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + v.u + v, uv)$$

dove $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > v\}$. Chiaramente $\mathbf{x}(U) \subset P$. $\mathbf{x}$ è anche una parametrizzazione di P?