GE2 - Tutorato I

Chiara Del Vescovo

12 ottobre 2005

1. Sia b la forma bilineare simmetrica su $\mathbb{R}^5$ definita rispetto ad una base $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^5$ dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

   (a) Verificare che b è non degenere.

   (b) Posto $\mathcal{W} = \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_5 \rangle$, determinare le equazioni di $\mathcal{W}^\perp$.

   (c) Verificare che $\mathcal{W} \bigcap \mathcal{W}^\perp = \langle 0 \rangle$.

2. Sia q la forma quadratica $q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + x_3^2$ rappresentata nella base canonica $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

   (a) Scrivere la matrice $\mathcal{A}$ della forma bilineare simmetrica b associata a q.

   (b) Verificare che il vettore $\mathbf{x}_0 = (-1, 0, 1)$ non è b-isotropo.

   (c) Determinare due vettori $\mathbf{y}'$ e $\mathbf{y}'' \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{y}' + \mathbf{y}'' = \mathbf{e}_3$ con $\mathbf{y}' \| \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}'' \perp \mathbf{x}_0$.

   (d) Determinare le equazioni cartesiane di $\mathbf{e}_3^\perp$ e due suoi generatori.

3. Sia q la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita rispetto ad una base $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ dalla matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -7 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \\ -7 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Determinare l'espressione di q e della forma bilineare simmetrica b associata a q.

(b) Ridurre b in forma diagonale (con il metodo di Lagrange), determinando l'espressione di b ed una base b-diagonalizzante $\mathbb{F}$ di $\mathbb{R}^4$.

(c) Determinare il rango e la segnatura di b e scriverne la matrice canonica.

4. Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare così definita rispetto alla base canonica $\mathbb{E}$ di $\mathbb{R}^4$:

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 - 2x_2y_4 + x_3y_3$$
$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

(a) Scrivere la matrice $\mathcal{A}$ di b rispetto ad $\mathbb{E}$.

(b) Verificare che b è una forma degenere ed individuare due vettori non nulli, $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^4$ t.c.: $b(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) = 0$ $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4$ e $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) = 0$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$.

5. (a) Verificare che $\mathbb{Q}[X]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$;

(b) Verificare che l'applicazione $b_1 : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}$ così definita: $b_1((p(X), q(X))) := p(1)q(1)$ è una forma bilineare simmetrica;

(c) Determinare un vettore $p_1(X) \in \mathbb{Q}[X]$ $b-$isotropo;

(d) Determinare un vettore $p_2(X) \in \mathbb{Q}[X]$ $b-$ortogonale a qualsiasi vettore $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$;

(e) Esiste una forma bilineare simmetrica $b_a : \mathbb{Q}[X] \times \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}$ t. c. $b_a((p(X), q(X))) = p(a)q(a)$ che non ammette vettori b_a-isotropi? E se $b_a : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$?

6. Considerate le espressioni seguenti:

(a) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - x_2y_1 + 3x_3y_3 - 2x_3y_2$

(b) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2 - x_3y_2 - x_2y_3 + x_3y_3$

(c) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 + y_2 + 2x_2y_3 - 3y_1$

(d) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_2y_1 + x_1y_2 + \sqrt{3}x_2y_3 + \sqrt{3}x_3y_2$

(e) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_2 + 4x_1y_3 + 3x_3y_3 - x_2y_2 + 3x_2y_3$

(f) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_2y_1 + x_1y_2 + \sqrt{3}x_2y_3 + \sqrt{3}x_3y_2$

(g) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3$

(h) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2$

(i) $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_3 + \sqrt{(x_2y_2)^2}$

verificare per ognuna di esse se si tratta di una forma bilineare o, in caso affermativo, di un prodotto scalare.