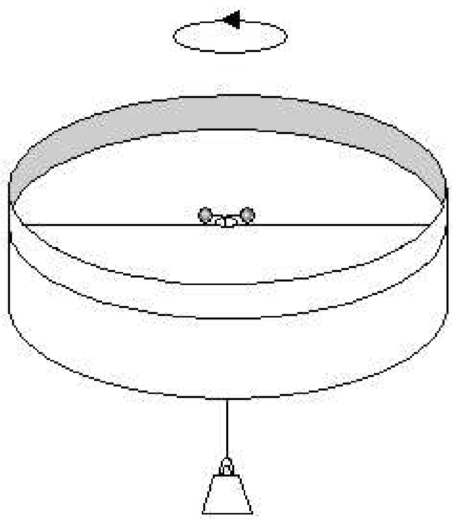
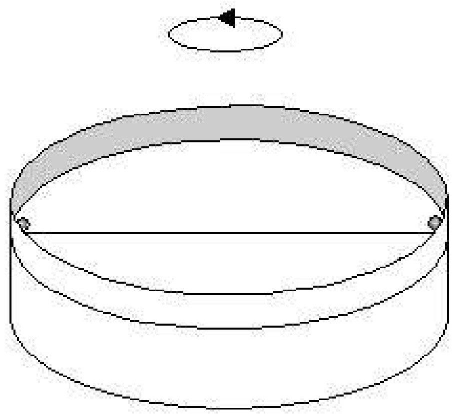
Prova scritta di Fisica 1 per Matematica del 20.01.2006

Esercizio 1 (15pt)

Un disco omogeneo di massa M e raggio R ruota intorno all'asse passante per il suo centro di massa (vedi figura) con velocità ω. A una distanza $r = R/10$ dal centro del disco sono fissate due palline di massa $m = M/2$ ciascuna; ad un certo istante il blocco che mantiene ferme le due palline viene rimosso e le due palline raggiungono il bordo del disco (muovendosi su una guida priva di attrito), senza cadere. Quale sarà il rapporto tra la velocità angolare in questa situazione e la velocità angolare iniziale del sistema? (approssimare le due palline a due punti materiali).





La conservazione del momento angolare afferma che

$$P_f = P_i \tag{1}$$

dove il momento angolare è definito da

$$P = I\omega \tag{2}$$

dove I è il momento di inerzia di un corpo rispetto all'asse di rotazione.

Il momento angolare iniziale è dato dalla somma del momento angolare del disco $P_{Di} = I_D\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega$ (dove I_D è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse passante per il suo cdm) e il momento angolare delle due palline $P_{pp} = 2P_p = 2mr^2\omega$. Il momento angolare finale è dato dalla somma $\frac{1}{2}MR^2\omega_f + 2mR^2\omega_f$. Quindi, l'espressione della conservazione del momento angolare può essere riscritta:

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + 2mr^2\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega_f + 2mR^2\omega_f \tag{3}$$

ovvero

$$\frac{1}{2}MR^2\omega + M(\frac{R}{10})^2\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega_f + MR^2\omega_f \tag{4}$$

da cui si ricava

$$\frac{\omega_f}{\omega} = \frac{17}{50} = 0.34 \tag{5}$$

Esercizio 2 (15pt)

Due solidi di massa m identica e temperatura diversa (T_1 e T_2) vengono chiusi in un contenitore isolante e messi a contatto. I rispettivi calori specifici sono $C_1 = C_0 + \alpha T$ e C_2. Calcolare la temperatura di equilibrio T_f e la variazione di entropia del sistema. Dati: $T_1 = 300°K$, $T_2 = 400°K$, $C_0 = 12Jkg^{-1}K^{-1}$, $\alpha = 0.1Jkg^{-1}K^{-2}$, $C_2 = 449Jkg^{-1}K^{-1}$, $m = 1kg$.

Poiché il calore specifico non è costante, scriviamo il bilancio dei calori assorbito e ceduto in forma differenziale e poi integriamo:

$$dQ_1 = -dQ_2 \Rightarrow mC_1dT = -mC_2dT \Rightarrow (C_0 + \alpha T)dT = -C_2dT \tag{6}$$

Integrando

$$\int_{T_1}^{T_f}(C_0 + \alpha T)dT = -\int_{T_2}^{T_f} C_2dT \tag{7}$$

ovvero

$$C_0(T_f - T_1) + \frac{\alpha}{2}(T_f^2 - T_1^2) = -C_2(T_f - T_2) \tag{8}$$

Riorganizzando questa equazione di secondo grado, e risolvendola con in valori forniti, si ottengono due soluzioni, una sola delle quali possibile:

$$T_f = 374K \tag{9}$$

Per la variazione di entropia, calcoliamo separatemente le variazioni del corpo 1 e del corpo 2 e poi sommiamole:

$$\Delta S_1 = m \int_{T_1}^{T_f} \frac{C_0 + \alpha T}{T} dT = m(C_0 \ln \frac{T_f}{T_1} + \alpha(T_f - T_1)) = 32.2JK^{-1} \tag{10}$$

$$\Delta S_2 = m \int_{T_2}^{T_f} \frac{C_2}{T} dT = mC_2 \ln \frac{T_f}{T_2} = -30.2JK^{-1} \tag{11}$$

Quindi

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 32.2 - 30.2 = 2JK^{-1} \tag{12}$$

Esrcizio 3 (5pt)

Si trovi la lunghezza del pendolo semplice il cui periodo è $2s$. Quale sarebbe il periodo T_L di questo pendolo sulla superficie della Luna, dove l'accelerazione di gravità è $\frac{1}{6}g$.

Il periodo è dato dalla

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow l = T^2 g \tag{13}$$

Sulla Luna

$$T_L = \sqrt{\frac{l}{\frac{1}{6}g}} = \sqrt{6\frac{T^2 g}{g}} = \sqrt{6}T \tag{14}$$