AM3 -SOLUZIONI 3
A.A. 2005-2006

Laura Di Gregorio

31 marzo 2006

Soluzione 1 .
Si ha che

$$F(0,0,0) = 0$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
\det\left(\nabla_y F\right)|_{(0,0,0)} &= \left|\begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{matrix}\right|_{(0,0,0)} \\
&= \left|\begin{matrix} e^x + x\cos(y_1 y_2) y_2 & x\cos(y_1 y_2) y_1 \\ \\ 4y_1^3 & 1 \end{matrix}\right|_{(0,0,0)} \\
&= \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Quindi vale il teorema delle funzioni implicite. Ora studiamone l'aspetto quantitativo. La prima stima da verificare è

$$\sup_{|x|\le r} |F(y_0, x)| \le \frac{\rho}{2}$$

e nel nostro caso abbiamo

$$\sup_{|x|\le r} |(\sin x, 3|x|)| \le 4r \le \frac{\rho}{2}$$

da cui ottengo una prima stima su r

$$r \le \frac{\rho}{8}.$$

La seconda stima da verificare è

$$\sup_{\substack{|x|\le r\\|y|\le\rho}} \left\|\mathbb{I}-\nabla_y F\right\| = \sup_{\substack{|x|\le r\\|y|\le\rho}} \left\| \begin{pmatrix} 1-e^x - x\cos(y_1y_2)y_2 & -x\cos(y_1y_2)y_1 \\ -4y_1^3 & 0 \end{pmatrix} \right\| \le \frac{1}{2}.$$

Osserviamo che, data una matrice A di ordine $m\times n$, vale che

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \le \sqrt{nm}\|A\|_\infty \,,$$

quindi in questo caso devo verificare che valga

$$\sup_{\substack{|x|\le r\\|y|\le\rho}} \left\|\mathbb{I}-\nabla_y F\right\| \le \frac{1}{4} \,.$$

Imponiamo che la stima valga su tutti gli elementi della matrice:

$$\begin{aligned} |-4y_1^3| &\le 4\rho^3 \le \frac{1}{4} \\ |-x\cos(y_1y_2)y_1| &\le r\rho \le \frac{\rho^2}{8} \le \frac{1}{4} \\ |1-e^x - x\cos(y_1y_2)y_2| &\le e^r - 1 + r\rho \le 3r + \frac{\rho^2}{8} \le \frac{3}{8}\rho + \frac{\rho^2}{8} \le \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(se $r<1$) dove ho usato anche la stima ottenuta precedentemente su r in funzione di ρ. Scegliendo

$$\rho \le \frac{1}{4}$$

tutte e tre le stime sono verificate.
Quindi ho trovato:

$$\rho = \frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad r = \frac{1}{32}.$$

Soluzione 2 .
Osserviamo subito che l'origine è un punto di non derivabilità. Nell'origine la funzione assume valore

$$f(0,0) = -1$$

che è chiaramente un punto di minimo, infatti

$$f(x,y) - f(0,0) > 0 \qquad \forall\,(x,y) \ne (0,0)\,.$$

Con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 2\lambda x = 0 \\[2ex] \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y - 2\lambda y = 0 \\[2ex] x^2 + y^2 - 9 = 0\,. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono i punti $(0, \pm 3)$ e $(\pm 3, 0)$. Si trova che

$$f(0, \pm 3) = 11$$

e

$$f(\pm 3, 0) = 2\,.$$

Possiamo concludere che la funzione assume valore massimo 11 sul bordo nei punti $(0, \pm 3)$ mentre il minimo è -1 ed è assunto nell'origine.

Soluzione 3 .
Calcolo

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|y|^3 \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho \to 0} \rho^2 |\sin\theta|^3 \cos(\rho\cos\theta) = 0\,,$$

quindi la funzione è continua. Calcolo le derivate parziali

$$f_x = -\frac{|y|^3 \sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{|y|^3 x \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,$$

$$f_y = -\frac{3|y|y \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{|y|^3 y \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Osserviamo che le funzioni

$$\frac{|y|^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{|y|^3 x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{|y|y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \frac{|y|^3 y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

sono funzioni omogenee di grado maggiore di zero, quindi sono continue. In particolare sono continue entrambe le derivate parziali, ne segue la differenziabilità della f.
Si ha infine

$$\nabla(g \circ f)(0,0) = g'(f)\,\nabla f(0,0) = (\cos f + \sin f)e^f\,\nabla f(0,0) = 0\,.$$

Soluzione 4 .
Si ha che

$$\|x^{(n)}\|_{\ell^1} = \sum_k \frac{1}{k}\, e^{-k/n} < \infty \qquad\qquad \forall\, n$$

perché è una serie convergente, quindi sta anche in ℓ^2. Inoltre

$$x_k := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k}\, e^{-k/n} = \frac{1}{k}$$

e abbiamo che, detta $x := (x_1, x_2, \ldots)$,

$$\sum_k \frac{1}{k^2} < \infty\,, \qquad \text{quindi } \ x \in \ell^2$$

ma

$$\sum_k \frac{1}{k} = \infty\,, \qquad \text{quindi } \ x \notin \ell^1\,.$$

Infine si ha

$$\|x^{(n)} - x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}(e^{-k/n} - 1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k>n}\right)\frac{1}{k^2}(e^{-k/n} - 1)^2\,.$$

Osserviamo che la funzione

$$f(x) = x + e^{-x} - 1$$

è monotona, che $f(0) = 0$ e che $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$. Con queste considerazioni possiamo stimare

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}(e^{-k/n} - 1)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

Quindi otteniamo

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} + \sum_{k>n}\right)\frac{1}{k^2}(e^{-k/n} - 1)^2 \ &\leq\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \sum_{k>n} \frac{1}{k^2}(e^{-k/n} - 1)^2 \\
&\leq\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \sum_{k>n} \frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

dove nella seconda disuguaglianza ho usato che

$$1 - e^{-k/n} \leq 1\,, \qquad \forall\, x \geq 0\,.$$

Quindi

$$\|x^{(n)} - x\|_{\ell^2}^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} + \sum_{k>n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + \sum_{k>n} \frac{1}{k^2}\,.$$

Essendo $\sum_{k>n} \frac{1}{k^2}$ la coda di una serie convergente la somma va a zero per $n \to \infty$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\|_{\ell^2}^2 = 0\,.$$