AM3 - Esercitazione 3
A.A. 2005-2006

Laura Di Gregorio

31 marzo 2006

Esercizio 1 .
Sia
$$F : (y, x) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow F(y, x) \in \mathbb{R}^2$$
definita da
$$\begin{cases} F_1(y_1, y_2, x) = \sin x + e^x y_1 + \sin(y_1, y_2) \\ \\ F_2(y_1, y_2, x) = 3|x| + y_2 + y_1^4 \end{cases}$$
e sia $(y_{01}, y_{02}, x_0) = (0, 0, 0)$. Dimostrare che vale il teorema delle funzioni implicite in $(0, 0, 0)$ e trovare ρ ed r che soddisfano le stime presenti nell'enunciato del teorema.

Esercizio 2 .
Si determinino gli estremi della funzione
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$$
nel cerchio
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9\}.$$

Esercizio 3 .
Dimostrare che la funzione
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos x & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
è continua, differenziabile in $(0, 0)$.
Sia $g(z) = \sin z e^z$. Calcolare
$$\nabla(g \circ f)(0, 0)\,.$$

Esercizio 4 .
Sia $x^{(n)}$ la successione tale che

$$x_k^{(n)} = \frac{1}{k}\, e^{-k/n}\,.$$

Mostrare che $\forall\, n\;\, x^{(n)} \in \ell^2 \cap \ell^1$ e che $x^{(n)} \longrightarrow x$ in ℓ^2 con $x \in \ell^2$ ma $x \notin \ell^1$.