I Esonero di AM3 - 8/4/2006 Soluzioni

Docente: Dott. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1

a) Chiaramente $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{y=0\})$. Su $\{y=0\}$ abbiamo che $\lim_{(x,y,z)\to(x_0,0^+,z_0)} f(x,y,z) = x_0$. Inoltre, $f(0,y,z)=0$ per $y<0$ e vale il seguente limite

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,0^-,z_0),x\neq 0} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(x_0,0^+,z_0),x\neq 0} x\frac{e^{xy}-1}{xy} = x_0 \lim_{s\to 0}\frac{e^s-1}{s} = x_0.$$

Quindi, $f \in C(\mathbb{R}^3)$.

Abbiamo che:

- se $y>0$ $\partial_x f = 1+xy$, $\partial_y f = \frac{1}{2}x^2+2z^2y$ e $\partial_z f = 2zy^2$;

- se $y<0$ $\partial_x f = e^{xy}$, $\partial_y f = \frac{xye^{xy}-e^{xy}+1}{y^2}$ e $\partial_z f = 0$.

Calcoliamo ora, usando la defnzione, le derivate parziali di f su $\{y=0\}$:

$$\partial_x f(x_0,0,z_0) = 1,\ \partial_z f(x_0,0,z_0) = 0$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0,h,z_0)-f(x_0,0,z_0)}{h} &= \frac{x_0^2}{2} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0,h,z_0)-f(x_0,0,z_0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{x_0h}-1-hx_0}{h^2} = \partial_y f(x_0,0,y_0).\end{aligned}$$

Allora f é differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^3$.

b) Come per la continuitá dimostrata al punto precedente, distinguendo i limiti per $y>0$ e $y<0$, è possibile dimostrare la continuitá delle derivate parziali. Quindi $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

E' da notare che i valori delle funzioni derivate parziali in $(x_0,0,z_0)$ sono definiti come limiti dei rapporti incrementali e non come limiti delle derivate parziali per $(x,y,z)\to(x_0,0,z_0)$. Solo a posteriori, tali limiti coincidono.

Esercizio 2

a) La funzione f ha problemi di differenziabilitá per $x=1$ oppure $y=z=0$. Poiché $\{x=1\}\cap A = \{(1,0,0)\} \subset \{y=z=0\}$, risulta $f\in C^1(A\setminus S)$ ove $S = A\cap\{y=z=0\} = \{(x,0,0):\ |x|\le 1\}$.

Osserviamo che $\partial A = \{\phi_1(x,y,z) = z+x^2+y^2-1=0,\ z>0\} \cup \{(x,y,0) : \phi_2(x,y) = x^2+y^2-1\le 0\}$.

Allora il programma é il seguente:

1) studiare i punti critici liberi di f in Int $A = \{0<z<1-x^2-y^2\}$;

2) studiare i punti critici vincolati di f sul paraboloide $\{\phi_1=0\}$ accettando solo i punti con $z>0$;

3) studiare i punti critici di $g(x,y) = f(x,y,0)$ liberi in $\{x^2+y^2<1, y\neq 0\}$ e vincolati in $\{x^2+y^2=1, y\neq 0\}$;

4) studiare i punti critici liberi/vincolati di $h(x) = f(x,0,0)$ su $[-1,1]$.

Poiché A è compatto e $f\in C(A)$, f ammette massimo/minimo assoluto su A. Tali punti saranno da ricercare tra i punti ottenuti in (1)-(4).

1) Poiché in A abbiamo sempre $x\le 1$, nella definizione di $f(x,y,z)$ $|x-1| = x-1$. Da $\nabla f = \left(-1, \frac{2y}{\sqrt{2y^2+3z^2}}, \frac{3z}{\sqrt{2y^2+3z^2}}\right) \neq (0,0,0)$, f non ha punti critici in Int A.

2) L'equazione $\nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla\phi_1(x,y,z)$, $\phi_1(x,y,z)=0$, si traduce nel sistema:

$$\begin{cases}1+2\lambda x = 0,\ 2y\left(\frac{1}{\sqrt{2y^2+3z^2}}-\lambda\right) = 0,\ \frac{3z}{\sqrt{2y^2+3z^2}}-\lambda = 0,\ z+x^2+y^2 = 1.\end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo $y = 0$ oppure $y \neq 0$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2y^2+3z^2}} \neq 0$. Se $y = 0$, dalla terza equazione ottengo $\lambda = \sqrt{3}$ (poiché $z > 0$), dalla prima $x = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$, dalla quarta $z = \frac{11}{12}$, ossia il punto $p = (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{11}{12})$.
Se $y \neq 0$ e $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2y^2+3z^2}} \neq 0$, dalla terza equazione otteniamo $z = \frac{1}{3}$, dalla prima $x = -\frac{1}{2\lambda} = -\frac{\sqrt{2y^2+3z^2}}{2} = -\frac{\sqrt{6y^2+1}}{2\sqrt{3}}$ e dalla quarta $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{2}}$, ossia $p_\pm = (-\frac{\sqrt{10}}{6}, \pm\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{3})$.
3) Abbiamo che $g(x, y) = 1-x+\sqrt{2}|y|$. Poiché $\partial_x g = -1 \neq 0$, la funzione g puó ammettere solo punti critici vincolati in $\{x^2 + y^2 = 1, y \neq 0\}$. Per il Teorema dei Moltiplicatori di Lagrange, studiamo il sistema

$$\begin{cases} -1 = 2\lambda x, \ \sqrt{2}\dfrac{y}{|y|} = 2\lambda y, \ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

per punti con $y \neq 0$. Dalla prima equazione otteniamo $x, \lambda \neq 0$ e, usando anche la seconda, $x = -\frac{1}{2\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{2}}|y| < 0$. Dalla terza equazione otteniamo $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, ossia $q_\pm = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$.
4) Abbiamo che $h(x) = 1 - x$. Allora $h(x)$ non ha punti critici in $(-1, 1)$, raggiunge il minimo in $(1, 0, 0)$ e il massimo in $(-1, 0, 0)$ (corrispondenti a $x = 1$ e $x = -1$).

Poiché $0 = f(1, 0, 0) < f(-1, 0, 0) < f(p_\pm) < f(q_\pm) < f(p) = 1 + \frac{13}{12}\sqrt{3}$, otteniamo che $\min_A f = 0$, $\max_A f = 1 + \frac{13}{12}\sqrt{3}$, raggiunti rispettivamente nel punto $(1, 0, 0)$ e nel punto $p = (-\frac{1}{2\sqrt{3}}, 0, \frac{11}{12})$.

Esercizio 3
a) Sia $p = (0, 0, 0)$. Calcoliamo prima di tutto

$$JF(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sin x \ln(1 + z) + e^y \sin x & \frac{2y}{\cos y^2} - e^y \cos x & \frac{\cos x}{1+z} \\ -\sin x \sin y + 2(1 + x)z^2 & \cos x \cos y & 2(1 + x)^2 z \end{pmatrix}$$

Allora $F(p) = (0, 0)$ e $JF(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quindi $\partial_{(z,y)}F(p)$ è invertibile con matrice inversa $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Possiamo applicare il Teorema della Funzione Implicita e trovare una mappa $g(x) : B_r(0) \to B_\rho((0, 0))$, per $r, \rho > 0$ piccoli, che descrive localmente in p l'insieme $\{F = 0\}$ come il grafico $\{(x, g(x)) : x \in B_r(0)\}$. Per trovare esplicitamente $\frac{1}{2} > r, \rho > 0$, osserviamo che:

$$\sup_{|x|<r} |F(x, 0, 0)| = \sup_{|x|<r} |1 - \cos x| \leq r \leq \frac{\rho}{4} \leq \frac{\rho}{2\|T\|}$$

per $r \leq \frac{\rho}{4}$, ove nella prima disuguaglianza $|1 - \cos x| = |\sin \xi||x| \leq |x|$ per il Teorema di Lagrange e $\|T\| \leq 2\|T\|_\infty = 2$.
Abbiamo quindi imposto $r \leq \frac{\rho}{4}$. La matrice

$$A(x, y, z) := \text{Id } - T\partial_{(y,z)}F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 - \cos x \cos y & -2(1 + x)^2 z \\ e^y \cos x - \frac{2y}{\cos y^2} - \cos x \cos y & 1 - \frac{\cos x}{1+z} - 2(1 + x)^2 z \end{pmatrix}$$

deve soddisfare $\sup_{|x|<r,|(y,z)|<\rho} \|A(x, y, z)\|_\infty \leq \frac{1}{4}$, in vista di $\|A(x, y, z)\| \leq 2\|A(x, y, z)\|_\infty$.
Abbiamo le seguenti stime:

$$|1 - \cos x \cos y| \leq |1 - \cos x| + |\cos x(\cos y - 1)| \leq |x| + |y| \leq \frac{5}{4}\rho$$

$$| - 2(1 + x)^2 z| \leq 8|z| \leq 8\rho$$

$$|e^y \cos x - \frac{2y}{\cos y^2} - \cos x \cos y| \leq |\cos x(e^y - 1)| + |\cos x(\cos y - 1)| + \frac{2|y|}{1 - |1 - \cos y^2|} \leq e|y| + |y| + \frac{8}{3}|y| \leq 8\rho$$

$$|1 - \frac{\cos x}{1+z} - 2(1+x)^2 z| \leq |\frac{z}{1+z}| + \frac{|1 - \cos x|}{|1+z|} + 8|z| \leq 10\rho + 2r \leq 12\rho,$$

poiché $1 - |1 - \cos y^2| \geq 1 - |y|^2 \geq 1 - \rho^2 \geq \frac{3}{4}$, $|1+z| \geq 1 - |z| \geq 1 - \rho \geq \frac{1}{2}$ da $\rho < \frac{1}{2}$ e $|e^y - 1| = e^{\xi}|y| \leq e^{|y|}|y| \leq e|y|$ dal Teorema di Lagrange. Basta chiedere quindi $\rho = \frac{1}{48}$ e di conseguenza $r = \frac{\rho}{4} = \frac{1}{192}$.

b) Abbiamo $g(0) = (0,0)$. Poiché F ammette derivate ad ogni ordine continue sul proprio dominio di definizione, dal Teorema della Funzione Implicita segue che $g(x) \in C^\infty(B_r(0))$ e vale la formula: $\partial_{(y,z)}F(x, g(x))\partial_x g(x) = -\partial_x F(x, g(x))$, ove $\partial_x g$ e $\partial_x F$ sono pensati come vettori colonna.

Abbiamo che $\partial_x F(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin x \ln(1+z) + e^y \sin x \\ -\sin x \sin y + 2(1+x)z^2 \end{pmatrix}$.

Calcolando in $x = 0$, otteniamo $\partial_x g(0) = -T\partial_x F(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Derivando la relazione $\partial_{(y,z)}F(x, g(x))\partial_x g(x) = -\partial_x F(x, g(x))$ in x e calcolando per $x = 0$, otteniamo:

$$\partial_x^2 g(0) = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_x^2 F(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Allora

$$g(x) = (y(x), z(x)) = g(0) + \partial_x g(0)^T x + \frac{1}{2}\partial_x^2 g(0)^T x^2 + O(|x|^3) = (0, -\frac{x^2}{2}) + O(|x|^3).$$

Esercizio 4

a) Abbiamo che:

$$\|x_n\|_{l^2}^2 = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k+1} (\frac{1}{n+1})^{k+1} = \ln(1 + \frac{1}{n}),$$

ove abbiamo usato lo sviluppo $\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{k+1}}{k+1}$ per $0 < x = \frac{1}{n+1} < 1$.

b) Dal punto (a) $\|x_n\|_{l^2} \to 0$ per $n \to +\infty$. Quindi $x_n \to 0$ in l^2.

Inoltre, per $x \geq 0$ vale $e^x \geq 1 + x \geq x$. Allora $(n+1)^{\frac{k+1}{2}} = e^{\frac{k+1}{2}\ln(n+1)} \geq \frac{k+1}{2}\ln(n+1)$. Da questa stima otteniamo

$$|x_n^{(k)}| \leq \frac{2}{\ln(n+1)} \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}}$$

e quindi

$$\|x_n\|_{l^2} \leq \frac{2}{\ln(n+1)} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \to 0\,, \ \|x_n\|_{l^1} \leq \frac{2}{\ln(n+1)} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(k+1)^{\frac{3}{2}}} \to 0$$

per $n \to +\infty$. Abbiamo mostrato che $x_n \to 0$ se $n \to +\infty$ anche in l^1.