AM2 2005-2006: RECUPERO II ESONERO

TEMA 1. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$ connesso per archi. Provare che

$f \in C(A) \quad \Rightarrow \quad f(A)$ é un intervallo.

TEMA 2. Provare il seguente Teorema

$f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad f$ é differenziabile in u.

Mostrare con un esempio che una funzione differenziabile in un disco $D_r(u) \subset \mathbf{R}^N$ non é necessariamente di classe $C^1(D_r(u))$.

TEMA 3 Provare la formula di Taylor: se $f \in C^2(D_r(u))$, allora

$$f(u+h) \;=\; f(u) + \;< \nabla f(u)\,,\, h > \;+ \frac{1}{2} < H_f(u)\, h,\; h > \;+\; \circ\,(||h||^2)$$

TEMA 4 Sia $f \in C^1(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^2$, $(x_0, y_0) \in O$. Provare il Teorema del Dini:

$f_y(x_0, y_0) \;\neq\; 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, \delta,\ \sigma > 0, \quad \exists\ \varphi \in C^1((x_0-\delta, x_0+\delta), (y_0-\sigma, y_0+\sigma)) :$

$f(x,y) \;=\; f(x_0,y_0), \quad (x,y) \in\; [x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\sigma, y_0+\sigma] \qquad \Leftrightarrow \qquad y \;=\; \varphi(x)$

Provare inoltre che $\qquad \varphi'(x) \;=\; -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$

TEMA 5 Provare i seguenti fatti

(i) Se R é rettangolo in $\mathbf{R}^N$, $f : R \to \mathbf{R}$ é integrabile , allora il grafico $\{(u, f(u)) : u \in R\}$ é di misura nulla in senso stretto (in $\mathbf{R}^{N+1}$).

(ii) Se $f \in C^1(\mathbf{R}^N)$, $Z \;:=\; \{u : f(u) \;=\; 0\}$ é limitato e $f(u) = 0 \;\Rightarrow\; \nabla f(u) \neq 0$ allora Z é di misura nulla (in senso stretto).

ESERCIZIO 1 Sia

$$g(x,y) \;=\; \frac{x\;\,y^2}{\log(x^2+y^2)\;\;[x^8+y^2]} \quad \text{se} \quad x^2+y^2 \;\neq\; 0, \quad g(0,0) \;=\; 0$$

(i) Stabilire se g é continua in $(0,0)$

(ii) Stabilire se g é differenziabile in $(0,0)$

ESERCIZIO 2 Sia $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$

(i) Determinare il minimo assoluto di f

(ii) Trovare i numeri reali c per i quali $\Gamma_c := \{f = c\}$ é una curva regolare

(iii) Calcolare $\max\limits_{\Gamma_0} f_i, \quad i = 1,2$ ove $f_1(x,y) = x^2+y^2, \qquad f_2(x,y) = y$

ESERCIZIO 3 Dato $0 < \epsilon < 1$, sia

$$D_\epsilon := \{(x,y): \quad x \geq 0, \quad y \geq \frac{\epsilon}{x}\} \cap ([0,1]\times[0,1])\,, \qquad\qquad I_\epsilon := \int\limits_{D_\epsilon} \frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$$

Calcolare I_ϵ, provare che $I_\epsilon \rightarrow_{\epsilon\rightarrow 0} +\infty$ e determinare con quale velocitá I_ϵ va all'infinito.

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1 $\quad g$ é differenziabile in $(0,0)$:

$$\left|\frac{x \qquad y^2}{\log(x^2+y^2) \qquad [x^8+y^2] \qquad \sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \left|\frac{x}{\log(x^2+y^2) \quad \sqrt{x^2+y^2}}\right| \rightarrow_{x^2+y^2\to 0} 0$$

ESERCIZIO 2

(i) É $\quad f(x,y) \geq (x^2+y^2)[x^2+y^2-2]$. $\quad$ Quindi f é coerciva (cioé $\|u\| \to +\infty \;\Rightarrow\; f(u) \to +\infty$) $\quad$ quindi dotata di minimo assoluto.

É $\quad f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \qquad f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$ e quindi il gradiente di f si annulla in $(0,0)$ e in $(\pm 1, 0)$.

Siccome $\; f(x,0) = x^4 - 2x^2 \;$ e $\; f(0,y) = y^4 + 2y^2$, $\; f$ ha , in $(0,0)$, un massimo lungo l'asse delle x ed un minimo lungo l'asse delle y ed é quindi una sella. Necessariamente $(\pm 1, 0)$ sono due punti di minimo assoluto:

$$\min_{\mathbf{R}^2} f = f(\pm 1, 0) = -1$$

(notiamo anche che

$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$
e quindi $\qquad \det H_f(\pm 1, 0) > 0, \qquad \det H_f(0,0) < 0$).

(ii) $\; f(0,0) = 0, \quad f(\pm 1, 0) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma_c$ é curva regolare sse $c \neq 0, \; c \neq -1$.

(iii) Siccome f é continua e coerciva (vedi (i)) Γ_c é chiuso e limitato per ogni c. In particolare, ogni funzione continua é dotata di massimo e di minimo su Γ_0.

Siccome chiaramente le f_i prendono valori positivi su Γ_0, i punti di massimo assoluto non possono cadere in $(0,0)$, che é l'unico punto singolare di Γ_0 e quindi stanno tra le soluzioni del sistema ai moltiplicatori $\nabla f_i = \lambda f, f = 0$ con, necessariamente, $\lambda \neq 0$.

Per $\quad f_1(x,y) = x^2 + y^2, \quad$ il sistema si scrive

$$2x = 4\lambda x[x^2+y^2-1], \qquad 2y = 4\lambda y[x^2+y^2+1], \qquad (x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$$

che si riduce a $\quad y = 0, \;\; 1 = 2\lambda(x^2-1), \;\; x^4 = 2x^2 \quad$ e quindi $\quad x = \pm\sqrt{2}$:

$$\max_{\Gamma_0} \; (x^2+y^2) \;=\; f_1(\pm\sqrt{2}, 0) \;=\; 2$$

Per $f_2(x,y)=y$ si puó procedere in modo analogo, oppure si puó esplicitare y nell'equazione $f=0$ ottenendo

$$y^2 = \sqrt{4x^2+1} - (x^2+1)$$

che raggiunge il suo massimo se $x^2 = \frac{3}{4}$ e quindi

$$\max_{\Gamma_0} \quad y^2 \quad = \quad \frac{1}{4}$$

ESERCIZIO 3 $D_\epsilon = \{(x,y): \quad \epsilon \le x \le 1, \quad \frac{\epsilon}{x} \le y \le 1\}$ é dominio normale e le formule di riduzione danno

$$I_\epsilon \quad := \quad \int_{D_\epsilon} \frac{dx\, dy}{x^2+y^2} \quad = \quad \int_\epsilon^1 \left(\int_{\frac{\epsilon}{x}}^1 \quad -\frac{1}{x} \ \frac{\partial}{\partial y} \quad \left[\arctan \frac{x}{y}\right] dy \right) dx \quad =$$

$$= \quad \int_\epsilon^1 \quad \left[\frac{1}{x} \ \arctan \frac{x^2}{\epsilon} \quad - \quad \frac{\arctan x}{x} \right] \quad dx$$

Siccome, posto $x = \sqrt{\epsilon}\ t$, risulta $\int_\epsilon^1 \frac{1}{x} \arctan \frac{x^2}{\epsilon} dx = \int_{\sqrt{\epsilon}}^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{\arctan t^2}{t} dt$, troviamo

$$I_\epsilon \quad = \quad \circ(1) + \int_0^1 \frac{1}{x} \quad [\arctan x^2 - \arctan x] \quad dx \quad + \quad \int_1^{\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}} \frac{\arctan t^2}{t} dt \to \epsilon \to 0 = +\infty$$

perché $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx = +\infty$. Piú precisamente, usando l'Hopital, vediamo che

$$\lim_{R\to+\infty} R \quad \left[\int_1^R \quad \frac{\arctan t^2}{t} dt \quad - \quad \frac{\pi}{2} \log R \right] \quad = \quad \lim_{R\to+\infty} R \quad \left[\frac{\pi}{2} \quad - \quad \arctan R^2 \right] \quad = 0$$

e quindi

$$I_\epsilon \quad = \quad \circ(1) + \int_0^1 \quad \frac{1}{x} \quad [\arctan x^2 - \arctan x] \quad dx \quad - \quad \frac{\pi}{4} \quad \log \epsilon$$

cioé I_ϵ va come $|\log \epsilon|$.