AM2 2005-2006: II ESONERO

TEMA 1. Sia $K \subset \mathbf{R}^N$ chiuso e limitato. Provare le seguenti proprietá

(i) $u_k \in K \quad \Rightarrow \quad \exists\ u_{k_j}, \quad \exists\ u \in K: \quad u_{k_j} \to u.$

(ii) se $O_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}$ sono aperti tali che $K \subset \cup_\alpha O_\alpha$, allora

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n : \qquad K \subset \cup_{j=1}^n O_{\alpha_j}$$

TEMA 2. Provare il Teorema di Weierstrass:

se $f \in C(E),\ E \subset \mathbf{R}^n$, ed E é compatto, allora $\exists \quad \underline{u} \in E : \qquad \inf_K f = f(\underline{u})$

Provare che la stessa conclusione vale nell'ipotesi che E sia chiuso e che

$$u_n \in E, \quad \|u_n\| \to_n +\infty \quad \Rightarrow \quad f(u_n) \to_n +\infty$$

TEMA 3 Provare il Lemma di Schwartz: se $O \subset \mathbf{R}^N$ é aperto, allora

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, n$$

TEMA 4 Sia $f \in C(D_r(u))$ e sia $f(u) \leq f(v) \quad \forall v \in D_r(u)$. Provare che

(i) $f \in C^1(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) = 0$

(ii) $f \in C^2(D_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h,\ h > \ \geq \ 0 \quad \forall\, h \in \mathbf{R}^n$

TEMA 5. Dimostrare il Teorema di Riemann: se R é un rettangolo in $\mathbf{R}^2$

allora $\qquad f \in C(R) \qquad \Rightarrow \qquad f$ integrabile in R.

Provare con un esempio che la continuitá di f in R non é essenziale. Dare quindi una condizione sull'insieme dei punti di discontinuitá di f in R (supposto non vuoto) che assicuri l'integrabilitá di f in R, indicando elementi di prova.

ESERCIZIO 1 Sia

$$f(x,y) \;=\; x^{\frac{1}{3}} \;\; \frac{\sin x \;\; \sin y^2}{x^8 + y^2} \qquad \text{se} \qquad x^2 + y^2 \;\neq\; 0, \qquad f(0,0) \;=\; 0$$

(i) Stabilire se f é continua in $(0,0)$

(ii) Stabilire se f é differenziabile in $(0,0)$

ESERCIZIO 2 Sia $g(x,y) \;:=\; 4y^2 - x^4(1+4y) + 2x^6, \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$

(i) Calcolare $\inf\limits_{\mathbf{R}^2} g \qquad \sup\limits_{\mathbf{R}^2} g$

(ii) Determinare massimi o minimi (locali) di g (se esistono)

(iii) Calcolare $\inf\limits_{\{g=0\}} y$ e stabilire se si tratta di un minimo

ESERCIZIO 3 Calcolare, usando il teorema di Fubini,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}$$

ESERCIZIO 4 Calcolare il seguente integrale doppio

$\int\limits_D e^{y-2x}\, dxdy$ ove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq 1\}$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. f é differenziabile (e quindi anche continua) in $(0,0)$. Infatti: osserviamo intanto che, siccome f ha derivate parziali nulle in $(0,0)$, la differenziabilitá di f in zero equivale a $\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$; ed infatti,

$$\left| x^{\frac{1}{3}} \quad \frac{\sin y^2 \quad \sin x}{(x^8+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \right| \quad \leq \quad |x|^{\frac{1}{3}} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

Piú in generale, scrivendo

$$\frac{|x|^{\alpha} \quad |y|^{\beta}}{(x^8+y^2)\,\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|^a\,|y|^b}{x^8+y^2}\quad\frac{|x|^{\epsilon} \quad |y|^{\delta}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{\frac{|x|^{2\epsilon} \quad |y|^{2\delta}}{x^2+y^2}}, \qquad a+\epsilon=\alpha,\ b+\delta=\beta$$

(ottenuta usando Holder con $p=\frac{8}{a},\ q=\frac{p}{p-1}=\frac{2}{b}$ e quindi $a+4b=8$), vediamo che

$$\frac{|x|^{\alpha} \quad |y|^{\beta}}{(x^8+y^2)\,\sqrt{x^2+y^2}} \to_{x^2+y^2\to 0} 0$$

se $\epsilon,\delta\geq 0$, $2<2\epsilon+2\delta$. Tale scelta di α,β é possibile se $9<\alpha+4\beta$: basta prendere δ positivo e $\delta<\frac{\alpha+4\beta-9}{3}$ e $\delta<\frac{\alpha+4\beta-8}{4}$ cosicché

$$\epsilon := \alpha+4(\beta-\delta)-8 > \alpha+4\beta-8-4(\frac{\alpha+4\beta-8}{4}) = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon+\delta = \alpha+4\beta-3\delta-8 > 1$$

Nel nostro caso $\alpha=\frac{4}{3}$, $\beta=2$, e , se $\delta=\frac{1}{12}$ $\epsilon=1$.

ESERCIZIO 2.

(i) g non é né inferiormente né superiormente limitata:

$$g(x,0)=2x^6-x^4 \to_{|x|\to+\infty} +\infty \quad\Rightarrow\quad \sup_{\mathbf{R}^2}\ g=+\infty$$

$$g(x,x^3)=6x^6-x^4-4x^7 \to_{x\to+\infty} -\infty \quad\Rightarrow\quad \inf_{\mathbf{R}^2}\ g=-\infty$$

(ii) I punti critici di g, soluzioni di

$$g_x := 12x^5-4x^3(1+4y)=0, \qquad g_y := 8y-4x^4=0$$

sono $(0,0)$, $(\pm 1,\frac{1}{2})$, $(\frac{\pm\sqrt{2}}{2},\frac{1}{8})$, e si ha $g(0,0)=g(\pm1,\frac{1}{2})=0$, $g(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{8})=-\frac{1}{12}$. Poi

$g_{xx}(x,y) = 60x^4 - 12x^2(1+4y) \Rightarrow g_{xx}(0,0) = 0 \;\; g_{xx}(\pm 1, \frac{1}{2}) = 24 \;\; g_{xx}(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8}) = 6$
$g_{xy}(x,y) = -16x^3 \Rightarrow \quad g_{xy}(0,0) = 0 \;\; g_{xy}(\pm 1, \frac{1}{2}) = \mp 16 \;\; g_{xy}(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8}) = \mp 4\sqrt{2}$
$g_{yy} \equiv 8.$ Siccome, se $H_g(x,y)$ é la matrice Hessiana di g in (x,y), risulta

$$\det H_g(0,0) = 0, \qquad \det H_g(\pm 1, \frac{1}{2}) < 0, \qquad \det H_g(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8}) > 0$$

e quindi $H_g(0,0)$ é semidefinita positiva, $H_g(\pm 1, \frac{1}{2})$ ha due autovalori di segno opposto, $H_g(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8})$ é definita positiva, concludiamo che

$(\pm 1, \frac{1}{2})$ é un punto di sella, $\qquad (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{8})$ é punto di minimo.

Infine $(0,0)$ non é né di massimo né di minimo, perché é di massimo per $x \to g(x,0) = 2x^6 - x^4$ e di minimo per $y \to g(0,y) = 4y^2$.

(iii) $4y^2 + 2x^6 = x^4(1+4y) \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow \inf_{\{g=0\}} y \geq -\frac{1}{4}$. Siccome poi $g(x_n, y_n) = 0,\; y_n \to \inf_{\{g=0\}} y$, (cioé (x_n, y_n) successione minimizzante) $\Rightarrow x_n$ é limitata e quindi (eventualmente passando a una sottosuccessione) convergente, concludiamo che $\inf_{\{g=0\}} y$ é realizzato, cioé é il minimo di y su $\{g=0\}$. Il punto di minimo si deve trovare tra i punti singolari di $\{g=0\}$, ovvero $(0,0)$ e $(\pm 1, \frac{1}{2})$ e le soluzioni del sistema di Lagrange

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \qquad g = 0 \qquad (f(x,y) := y) \qquad \text{ovvero}$$

$$0 = 12x^5 - 4x^3(1+4y), \qquad 1 = \lambda(8y - 4x^4), \qquad 4y^2 + 2x^6 - x^4(1+4y) = 0$$

Ma $3x^2 = 1 + 4y$, $g = 0 \Rightarrow 4y^2 + 2x^6 = 3x^6 \Rightarrow 4y^2 = x^6 \Rightarrow (3x^2-1)^2 = 4x^6$. Posto $t = x^2$, l'equazione si riscrive $4t^3 - 9t^2 + 6t - 1 = 0$, che ha $t = 1$ come radice doppia ($t = 1$ é anche zero della derivata). Notiamo che le corrispondenti soluzioni $x = \pm 1, y = \frac{1}{8}$ non sono peró soluzioni del sistema: l'equazione in λ non puó essere soddisfatta prché $(\pm 1, \frac{1}{8})$ é critico per g ma non per f.

Si trova poi subito la terza radice $t = \frac{1}{4}$, cui corrispondono le soluzioni del sistema $(\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{8}), (\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{16})$.

Dunque $-\frac{1}{16}$ é il minimo valore di y su $g(x,y) = 0$:

$$g(\pm\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}) = 0, \qquad g(x,y) = 0 \Rightarrow y \geq -\frac{1}{16}$$

A questo risultato si poteva pervenire direttamente esplicitando y nell'equazione $g(x,y) = 0$:

$$y = \frac{1}{2}\left(x^4 \pm x^2|x^2 - 1|\right)$$

cioé l'insieme degli zeri di g é l'unione dei due grafici

$$y = \frac{x^2}{2}, \qquad\qquad y = x^4 - \frac{x^2}{2}$$

e $y = x^4 - \frac{x^2}{2}$ ha un valore minimo, preso in $x = \pm\frac{1}{2}$, che vale appunto $y = -\frac{1}{16}$.

ESERCIZIO 4.

$$\begin{aligned} \int_D e^{y-2x}\,dxdy \quad &= \quad \int_0^1 \int_x^1 e^{y-2x}\,dy\,dx = \\ = \quad \int_0^1 (e^{1-2x} - e^{-x})\,dx \quad &= \quad \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^{-1} - 1 \end{aligned}$$