# Soluzioni I

14/03/2005

**Esercizio 1.** Consideriamo $Z = \lambda X^c$, allora la funzione di distribuzione è $F_Z(z)$ sarà data da:

$$P(Z < z) = P(\lambda X^c < z) = P\left(X < \left(\frac{z}{\lambda}\right)^c\right) = \int_0^{\frac{z}{\lambda}^c} \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c}\, dx$$

applicando il cambio di variabili $y = \lambda x^c$ si ha che $dy = cx^{c-1}dx$ e che gli estremi dell'integrale diventano 0 $z$. Perciò

$$P(Z < z) = \int_0^z e^{-y}\, dy = 1 - e^{-z}$$

ovvero la funzione di distribuzione di un'esponenziale di parametro 1.
Se invece utilizziamo la funzione generatrice dei momenti dobbiamo mostrare che

$$E[e^{tZ}] = \frac{1}{1-t}$$

cioè la funzione generatrice dei momenti di un'esponenziale di parametro 1.

$$\begin{aligned} E[e^{tZ}] &= E[e^{t\lambda X^c}] = \int_0^\infty \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c} e^{t\lambda x^c\, dx} = \int_0^\infty \lambda c x^{c-1} e^{-(1-t)\lambda x^c}\, dx \\ &= \frac{1}{1-t} \int_0^\infty \lambda(1-t) c x^{c-1} e^{-(1-t)\lambda x^c}\, dx = \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

dal fatto che $\int_0^\infty \lambda(1-t)cx^{c-1}e^{-(1-t)\lambda x^c}\, dx = 1$ essendo l'integrale della densità di una variabile Weibull di parametri $(1-t)\lambda$ e $c$.

**Esercizio 2.** Osserviamo che $0 < Y < 1$. Calcoliamo la funzione di distribuzione $F_Y(y)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P\left(\frac{X}{1+X} < y\right) = P\left(X < \frac{y}{1-y}\right) \\ &= \int_0^{\frac{y}{1-y}} \frac{1}{B(a,b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx = \int_0^{\frac{y}{1-y}} \frac{1}{B(a,b)} \frac{x^{a+b}}{(1+x)^{a+b}} \frac{1}{x^{b+1}}\, dx \end{aligned}$$

poniamo ora $z = \frac{x}{1+x}$, allora $x = \frac{z}{1-z}$ e $dx = \frac{dz}{(1-z)^2}$:

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{B(a,b)} z^{a+b} \frac{(1-z)^{b+1}}{z^{b+1}} \frac{dz}{(1-z)^2} = \int_0^y \frac{1}{B(a,b)} z^{a-1}(1-z)^{b-1}\, dz.$$

Perciò la $F_Y(y)$ è la funzione di distribuzione di una Beta con parametri $a, b$.

**Esercizio 3.** La dimostrazione si basa sulla proprietà di linearità del valore atteso e sulla definizione di covarianza ($Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$).

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) =$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right)\right) - E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) E\left(\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j X_i Y_j\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) \sum_{j=1}^{m} b_j E(Y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j E(X_i Y_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j E(X_i) E(Y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j (E(X_i Y_j) - E(X_i)E(Y_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov(X_i, Y_j). \qquad \square$$

**Esercizio 4.** (a) Se $X$ è una v.a. che ammette i momenti primi e secondi allora si ha in generale

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2.$$

Quindi possiamo scrivere per $S$:

$$(ES)^2 = E(S^2) - Var(S),$$

e sapendo che $E(S^2) = \sigma^2$ abbiamo

$$(ES)^2 = \sigma^2 - Var(S) < \sigma^2.$$

Da cui

$$ES < \sigma.$$

(b) Ricordiamo che se $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ si ha che

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Ora per calcolare $E(S) - \sigma$ dobbiamo prima calcolare la media di $S$, per fare questo avremmo bisogno della sua distribuzione che non è nota, calcoliamo quindi la media di $\sqrt{W}$ dove

$$W := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

$$E\left(\sqrt{W}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty (\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx,$$

dividendo e moltiplicando per $\Gamma(\frac{n}{2})$ si ha:

$$\frac{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

(dal fatto che $\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ è la densità di una v.a. $\chi^2_n$).
Concludiamo che

$$E\left(\sqrt{(W)}\right) = \frac{\sqrt{n-1}E(S)}{\sigma} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sqrt{2}$$

da cui si ricava

$$E(S) - \sigma = \sigma\left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} - 1\right). \qquad \square$$

**Esercizio 5.** La funzione generatrice dei momenti è

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum_{y=0}^\infty e^{ty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \sum_{y=0}^\infty \frac{(e^t\lambda)^y e^{-\lambda}}{y!} = e^{-\lambda} e^{e^t\lambda} \sum_{y=0}^\infty \frac{(e^t\lambda)^y e^{-e^t\lambda}}{y!} =$$

$$= e^{\lambda(e^t-1)}$$

Funzione generatrice dei cumulanti e primo e secondo cumulante:

$$K(t) = \log M(t) = \lambda(e^t - 1)$$

$$k_1 = \frac{d}{dt} K(t)|_{t=0} = \lambda e^t|_{t=0} = \lambda$$

$$k_2 = \frac{d^2}{dt^2} K(t)|_{t=0} = \lambda e^t|_{t=0} = \lambda \qquad \square$$

**Esercizio 6.** Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti di $S_n$

$$E(e^{tS_n}) = E(e^{t\sum_{i=1}^n Y_i}) = E(\prod_{i=1}^n e^{tY_i}) \overset{indipendenti}{=} \prod_{i=1}^n e^{\lambda(e^t-1)} = e^{n\lambda(e^t-1)}$$

Si ottiene la funzione generatrice dei momenti di una Poisson di parametro $n\lambda$, quindi concludiamo che $S_n$ ha distribuzione di tipo $Poisson(n\lambda)$. $\square$

**Esercizio 7.** La funzione generatrice dei momenti è

$$E(e^{tY}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y^2-2ty+t^2))} e^{\frac{t^2}{2}} dy =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(y-t)^2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

dal fatto che $\frac{e^{-\frac{1}{2}(y-t)^2}}{\sqrt{2\pi}}$ è la densità di una v.a. di tipo $N(t,1)$ segue che

$$E(e^tY) = e^{\frac{t^2}{2}}. \quad \square$$

**Esercizio 8.** Una v.a. $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ si può sempre esprimere come una combinazione lineare $Y = \mu + \sigma Z$ dove $Z \sim N(0,1)$. Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti sfruttando questa proprietà

$$E(e^{tY}) = E(e^{t\mu+t\sigma Z}) = E(e^{t\mu}e^{t\sigma Z}) = e^{t\mu}E(e^{t\sigma Z}) \overset{Es.7}{=} e^{t\mu}e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \quad \square$$

**Esercizio 9.**

$$E(e^{sX+tY}|\mu) = E(e^{sX}|\mu)E(e^{tY}|\mu) = e^{\mu(e^t-1)}e^{\mu(e^s-1)} = e^{\mu(e^t+e^s-2)}$$

$$E(e^{sX+tY}) = E(E(e^{sX+tY}|\mu)) = \int_0^\infty e^{\mu(e^t+e^s-2)} f(\mu) d\mu =$$

$$= \int_0^\infty e^{\mu(e^t+e^s-2)} \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda\mu} \mu^{\nu-1} d\mu =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu(\lambda-e^t-e^s+2)} \mu^{\nu-1} \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} d\mu =$$

$$= \frac{\lambda^\nu}{(\lambda-e^t-e^s+2)^\nu} \int_0^\infty \frac{(\lambda-e^t-e^s+2)^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\mu(\lambda-e^t-e^s+2)} \mu^{\nu-1} d\mu$$

dal fatto che $\frac{(\lambda-e^t-e^s+2)^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\mu(\lambda-e^t-e^s+2)}\mu^{\nu-1}$ è la densità di una v.a. di tipo $Gamma(\nu, \lambda - e^t - e^s + 2)$ si ha:

$$E(e^{sX+tY}) = \frac{\lambda^\nu}{(\lambda - e^t - e^s + 2)^\nu} . \qquad \square$$

**Esercizio 10.** In generale se $Y = aX$, $a > 0$ si ha

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(aX < Y) = P(X < \frac{y}{a}) = F_X(\frac{y}{a})$$

e quindi

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}F_X(\frac{y}{a}) = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}F_X(\frac{y}{a}) = \frac{1}{a}f_X(\frac{y}{a}).$$

Nel nostro caso otteniamo

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\lambda}\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)}e^{-\lambda\frac{y}{2\lambda}}(\frac{y}{2\lambda})^{k-1} = \frac{1}{2^k\Gamma(k)}e^{-\frac{y}{2}}y^{k-1}. \qquad \square$$

**Esercizio 11.** Lo stimatore dei momenti si ottiene sostituendo ai momenti della popolazione i momenti campionari.
Siano

$$m_1 := \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{n} \qquad \text{(momento primo campionario o media campionaria)}$$

$$m_2 := \sum_{i=1}^n \frac{Y_i^2}{n} \qquad \text{(momento secondo campionario)}$$

Per trovare lo stimatore dei momenti di $\alpha$ e $\beta$ imponiamo

$$m_1 = E(Y) \qquad \text{e} \qquad m_2 = E(Y^2) \qquad (Y \sim Beta(\alpha, \beta))$$

Sapendo che

$$E(Y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$E(Y^2) = Var(Y) + (E(Y))^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2$$

otteniamo il sistema

$$\begin{cases} m_1 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ m_2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} + (\frac{\alpha}{\alpha+\beta})^2 \end{cases}$$

Risolvendolo ricaviamo lo stimatore dei momenti $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ di $\alpha$ e $\beta$.

$$\hat{\alpha} = m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_2 - m_1^2} \qquad \hat{\beta} = (1 - m_1)\frac{m_1 - m_2}{m_2 - m_1^2}. \qquad \square$$