

Tutorato

3/5/2005

Esercizio 1. Consideriamo una variabile aleatoria x con distribuzione:

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x) \quad \theta > 0.$$

Per controllare l'ipotesi $H_0 : \theta \leq 1$ contro $H_1 : \theta > 1$ si è scelto un campione di ampiezza 2 e si è utilizzati il test con regione critica data da:

$$C_\alpha = \{(x_1, x_2) : \frac{3}{4}x_1 \leq x_2\}.$$

Trovare la funzione potenza $\pi(\theta)$ e l'ampiezza α del test.

Esercizio 2. Sia x un'osservazione singola dalla densità:

$$f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x) \quad \theta > 0.$$

a) Nel controllare l'ipotesi $H_0 : \theta \leq 1$ contro l'alternativa $H_1 : \theta > 1$ determinare la funzione potenza e l'ampiezza del test con regione critica data da:

$$C_\alpha = \{x : x \geq \frac{1}{2}\}.$$

b) Determinare il test più potente di ampiezza α per $H_0 : \theta = 2$ contro $H_1 : \theta = 1$.

c) Fra tutti i test possibili per $H_0 : \theta = 2$ contro $H_1 : \theta = 1$ trovare quello che minimizza la quantità $\alpha + \beta$.

Esercizio 3. Sia x un'osservazione singola estratta dalla densità:

$$f(x; \theta) = (2\theta x + 1 - \theta) I_{[0,1]} \quad \theta \in [-1, 1].$$

a) Trovare il test più potente di dimensione α per controllare $H_0 : \theta = 0$ contro $H_1 : \theta = 1$.

b) Per controllare $H_0 : \theta \leq 0$ contro $H_1 : \theta > 0$ si è usato il test con regione critica:

$$C_\alpha = \left\{x : x > \frac{1}{2}\right\},$$

determinare la funzione potenza.

Esercizio 4. Siano y_1, \dots, y_n i.i.d. $N(0, \sigma^2)$. Trovare un intervallo di confidenza di livello $1 - \alpha$ per σ^2 sulla base della distribuzione asintotica della stima di massima verosimiglianza.

Esercizio 5. Sia y_1, \dots, y_n un campione estratto da una normale con varianza 1. Trovare il test più potente di livello $\alpha = 0.05$ per il sistema di ipotesi:

$$H_0 : \theta = 0$$

$$H_1 : \theta = 2.$$

Calcolare la potenza del test per $\theta = 2$.

Supponendo che $n = 10$ e $\bar{y} = 1$ l'ipotesi nulla viene accettata o rifiutata?

(Il quantile di livello 0.95 di una $N(0, 1)$ è 1.64).