# Tutorato I
14/03/2005

**Esercizio 1.** Sia $X$ v.a. con funzione di densità di tipo *Weibull*:

$$f_X(x;\lambda,c) = \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c} I_{(0,\infty)}(x), \qquad \lambda, c > 0.$$

Dimostrare che se $Z = \lambda X^c$ allora

$$Z \sim Exp(1),$$

utilizzando sia la funzione di distribuzione che la funzione generatrice dei momenti.

**Esercizio 2.** Sia $X$ v.a. con funzione di densità di tipo *Beta di secondo tipo*:

$$f_X(x;a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} I_{(0,\infty)}(x),$$

dove $a > 0$ e $b > 0$. Trovate la distribuzione di $Y = X/(1+X)$, utilizzando la funzione di ripartizione.

**Esercizio 3.** Consideriamo i due insiemi di variabili aleatorie $\{X_1,\ldots,X_n\}$ e $\{Y_1,\ldots,Y_m\}$ e due insiemi di costanti $\{a_1,\ldots,a_n\}$ e $\{b_1,\ldots,b_m\}$, allora date le due combinazioni lineari

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i, \qquad \sum_{j=1}^m b_j Y_j,$$

si ha che

$$Cov\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^m b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j Cov(X_i, Y_j)$$

**Esercizio 4.** Siano $X_1,\ldots,X_n$ v.a. *iid* con varianza finita $\sigma^2$. Consideriamo la statistica campionaria

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

dove

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

è la media campionaria.
(a) Verificare che $S = \sqrt{S^2}$ è tale che $E(S) \neq \sigma = \sqrt{\sigma^2}$.
(b) Supponendo che $X_1,\ldots,X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu,\sigma^2)$, trovare $E(S) - \sigma$.

**Esercizio 5.** Sia $Y$ v.a. di tipo *Poisson($\lambda$)*. Trovare la funzione generatrice dei momenti, quella dei cumulanti ed il primo e secondo cumulante.

**Esercizio 6.** Siano $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ v.a. *iid* di tipo *Poisson*$(\mu)$. Trovare la distribuzione di

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

tramite la funzione generatrice dei momenti.

**Esercizio 7.** Trovare la funzione generatrice dei momenti di $Y \sim N(0,1)$.

**Esercizio 8.** Trovare la funzione generatrice dei momenti di $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ed il primo e secondo cumulante.

**Esercizio 9.** Siano $X$ e $Y$ condizionatamente a $\mu$ delle v.a. di tipo *Poisson*$(\mu)$ indipendenti:

$$P(X = x, Y = y \mid \mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}\,\frac{e^{-\mu}\mu^y}{y!}$$

e sia $\mu \sim Gamma(\nu, \lambda)$

$$f_\mu(\mu) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda\mu}\mu^{\nu-1}$$

Trovare $E(e^{sX+tY})$.

**Esercizio 10.** Sia $X \sim Gamma(\lambda, k)$. Mostrare che $Y := 2\lambda X$ ha funzione di densità

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma(\frac{v}{2})} y^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} I_{(0,\infty)}(y)$$

con $v = 2k$.

**Esercizio 11.** Dato un campione $Y_1, \dots, Y_n$ *iid* di tipo $Beta(\alpha, \beta)$ trovare lo stimatore dei momenti dei parametri $\alpha$ e $\beta$.