Esonero - MF1

A.A. 2004/2005

1. Si considerino due piani di investimento che promettono dopo 5 anni la restituzione del capitale versato più gli interessi (composti periodicamente): il primo prevede il versamento di 5 rate annuali di 1000€ ciascuna a partire da subito, mentre il secondo di 10 rate semestrali di 500€, sempre a partire da subito. Assumendo un tasso di interesse anuuale pari al 5%, determinare qual è l'investimento più conveniente. Come si può scegliere una rata affinchè i due piani siano equivalenti?

2. Si consideri un'opzione call europea con scadenza T e prezzo strike K scritta su azione: dimostrare che in assenza di opportunità di arbitraggio $c_0 \leq S_0$, dove c_0 e S_0 sono rispettivamente il premio dell'opzione e dell'azione al tempo $t = 0$.

3. Combinando opportunamente opzioni call e put europee, costruire un contratto forward su azione con un fissato prezzo di consegna K e maturità T.

4. Sul mercato sono scambiate due attività che restituiscono 1€ fra 1 e 2 anni rispettivamente a fronte di un investimento iniziale (oggi, $t = 0$) pari a $P_0^{(1)}(1)$ per la prima attività e $P_0^{(2)}(2)$ per la seconda. Sia inoltre $P_t^{(2)}(1,2)$ il prezzo offerto al tempo t sul mercato per l'acquisto fra un anno della seconda attività. Dimostrare che in assenza di opportunità di arbitraggio deve essere

$$P_0^{(2)}(1,2) = \frac{P_0^{(2)}(2)}{P_0^{(1)}(1)}.$$

5. Valutare tramite il modello binomiale uniperiodale la seguente opzione call: $S_0 =$ 10\$, $K =$ 10\$, $r = 6\%$ annuo, $T = 1$ mese, assumendo che il prezzo dell'azione possa salire o scendere del 20%. Determinare esplicitamente il vettore della probabilita' neutrale al rischio e la composizione del portafoglio di replica.

Soluzioni Esonero - MF1

A.A. 2004/2005

1. Calcoliamo i valori futuri al quinto anno dei due flussi di cassa, Φ_1 e Φ_2:

$$FV(\Phi_1) = 1000 \cdot \sum_{k=1}^{5}(1+r)^k = 1000 \cdot (1+r)\frac{1-(1+r)^5}{1-(1+r)} = 5801,91$$

$$FV(\Phi_2) = 500 \cdot \sum_{k=1}^{10}(1+r/2)^k = 500 \cdot (1+r/2)\frac{1-(1+r/2)^{10}}{1-(1+r/2)} = 5741,73$$

ed i valori attuali:

$$PV(\Phi_1) = \frac{FV(\Phi_1)}{(1+r)^5} = 4545,95$$

$$PV(\Phi_2) = \frac{FV(\Phi_2)}{(1+r/2)^{10}} = 4485,43$$

Dunque

$$R_1 = FV(\Phi_1) - PV(\Phi_1) = 1255,96$$

e

$$R_2 = FV(\Phi_2) - PV(\Phi_2) = 1256,30$$

Il secondo investimento risulta quindi più conveniente per 34 centesimi!. Per renderli equivalenti è sufficiente scegliere una rata R, p.e. per il secondo investimento, tale che

$$R \cdot (\sum_{k=1}^{10}(1+r/2)^k - \sum_{k=0}^{9}(1+r/2)^{-k}) = 1000 \cdot (\sum_{k=1}^{5}(1+r)^k - \sum_{k=0}^{4}(1+r)^{-k})$$

ovvero

$$R = 499,86.$$

2. Se $c_0 > S_0$ si può costruire la seguente strategia: al tempo 0 vendo la call (short call) e compro il sottostante (long stock), ottenendo un guadagno dato che $c_0 > S_0$. Al tempo T si avrà

$$-\max\{S_T - K, 0\} + S_T = \min\{S_T, K\} > 0$$

che realizza quindi l'arbitraggio.

3. Long call + short put:

$$\max\{S_T - K, 0\} - \max\{K - S_T, 0\} = S_T - K.$$

4. Supponiamo che $\alpha = \frac{P_0^{(2)}(2)}{P_0^{(1)}(1)} > P_0^{(2)}(1,2)$: si vende allo scoperto la seconda attività, si compra una percentuale α della prima e ci si accorda sull'acquisto della seconda attività al tempo 1 (che verrà pagata $P_0^{(2)}(1,2)$). Al tempo 1 si incassa α e si paga $P_0^{(2)}(1,2)$ per l'acquisto della seconda attività, realizzando per l'ipotesi un guadagno. Al tempo finale 2, si può chiudere la vendita allo scoperto poiche' si possiede la seconda attività, comprata al tempo 1.

Se al contrario $\alpha < P_0^{(2)}(1,2)$, si costruisce un arbitraggio in modo analogo: si vende allo scoperto una percentuale α della prima attività, si compra la seconda e ci si accorda sulla vendita della seconda attività al tempo 1 che permetterà di incassare $P_0^{(2)}(1,2)$ e di realizzare così un guadagno.

5. In questo modello si ha: $u = 1.2$, $d = 0.8$, da cui segue che la condizione $d \leq 1 + r\frac{1}{12} \leq u$ è verificata. Inoltre,

$$p^* = \frac{(1 + r\frac{1}{12}) - d}{u - d} = \frac{1.02 - 0.8}{0.4} = 0.55,$$

$$c_0 = \frac{1}{(1 + r\frac{1}{12})} c^+ = 1.0678$$

ed il portafoglio di replica è

$$\begin{cases} x^* &= -3.98 \\ y^* &= 0.5 \end{cases}$$