Esame - MF1

A.A. 2004/2005

1. Si consideri una struttura a termine dei rendimenti piatta, $R(t) \equiv R$ ed un coupon bond con cedole (annuali) C pagate m volte in un anno, valore principale F e maturità $T = n$ anni.

(a) Determinare il valore del coupon bond in assenza di opportunità di arbitraggio (composizione periodale degli interessi).

(b) Determinare il valore del rendimento R se il coupon bond è prezzato alla pari, $P = F$.

2. Si descriva il payoff alla maturità T ed il premio di un portafoglio ottenuto comprando una call con un certo prezzo strike e vendendo una call con un prezzo strike più alto (long call + short call) sullo stesso sottostante con medesima scadenza.

3. Valutare tramite un modello binomiale a 2 periodi il premio di una call su azione, con $S_0 = 25$ €, $K = 22$ € e $T = 1$, assumendo che il prezzo dell'azione possa salire o scendere del 10% con $r = 5\%$. Determinare esplicitamente il vettore della probabilità neutrale al rischio ed i portafogli di replica.

4. Descrivere il metodo di Newton–Raphson per approssimare le radici di un'equazione non lineare ($f(x) = 0$). Basandosi su tale metodo, descrivere una tecnica di approssimazione della volatilità implicita σ^* di un'opzione call di tipo europeo nel modello di Black-Scholes.

Soluzioni - MF1

A.A. 2004/2005

1. (a) Il valore del coupon bond è

$$P(n) = \frac{C}{m}\sum_{k=0}^{n\cdot m}\left(\frac{1}{1+R/m}\right)^k + F\left(\frac{1}{1+R/m}\right)^{n\cdot m} =$$

$$= \frac{C}{m}\left[\frac{1-1/(1+R/m)^{n\cdot m+1}}{1-1/(1+R/m))} - 1\right] + F\frac{1}{(1+R/m)^{n\cdot m}}$$

(b) Ponendo $P(n) = F$ nell'espressione precedente e semplificando, otteniamo l'equazione in R

$$F(1-1/(1+R/m)^{n\cdot m}) = \frac{C}{R}(1-1/(1+R/m)^{n\cdot m})$$

da cui si ha

$$R = C/F.$$

2. Il payoff finale (lordo) del portafoglio è

$$v_T = max\{S_T - K_1, 0\} - \max\{S_T - K_2, 0\}$$

con $K_1 < K_2$: dunque

$$v_T = \begin{cases} 0 & S_T \le K_1 \\ S_T - K_1 & K_1 < S_T \le K_2 \\ K_2 - K_1 & S_T > K_2. \end{cases}$$

Il premio iniziale è $c_0(K_2) - c_0(K_1) < 0$ poichè il valore del premio $c_0(K)$ è una funzione decrescente del prezzo strike.

3. In questo modello abbiamo $u = 1.1$ e $d = 0.9$, con $N = 2$, $T = 1$ e $r = 5\%$. Le probabilità neutrali al rischio sono

$$q_N = 0.625, \quad 1 - q_N = 0.375.$$

Il valore del premio nel modello CRR è $c_{CRR} = 4.29$. I portafogli di replica relativi ai tre sottoalberi sono:

$$C^+ \longrightarrow (C^{++}, C^{+-}): \quad x^* = -21.46, y^* = 1,$$

$$C^- \longrightarrow (C^{+-}, C^{--}): \quad x^* = -12.07, y^* = 0.61,$$
$$C_0 \longrightarrow (C^+, C^-): \quad x^* = -17.5, y^* = 0.87.$$

4. Il metodo di Newton – Raphson per la ricerca degli zeri di una equazione non lineare $f(x) = 0$, con f derivabile, è definito dalla seguente iterazione:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

per un fissato valore iniziale x_0. E' possibile dimostrare, sotto opportune condizioni, che la successione generata $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge ad un punto x^* tale che $f(x^*) = 0$ e che la convergenza è quadratica.

Nel caso della volatilità implicita si tratta di determinare quel valore della volatilità σ^* per il quale il valore osservato $\hat{c}_0$ dell'opzione uguaglia il valore teorico dato dal modello utilizzato $c(\sigma)$ come funzione di σ: per il modello Black-Scholes avremo dunque

$$f(\sigma) = \hat{c}_0 - (S_0 N[d_1(\sigma)] - Ke^{-rT} N[d_2(\sigma)])$$

dove

$$d_1(\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log \frac{S_0}{K} + (r + \sigma^2/2)T \right)$$

e

$$d_2(\sigma) = d_1(\sigma) - \sigma\sqrt{T}.$$

La quantità $\frac{d}{d\sigma}(S_0 N[d_1(\sigma_n)] - Ke^{-rT} N[d_2(\sigma_n)])$ è la greca V (Vega):

$$V = S_0 \phi(d_1)\sqrt{T}$$

dove $\phi(x)$ è la densità della legge gaussiana standard. Le iterazioni del metodo di Newton-Raphson sono dunque definite da

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{(\hat{c}_0 - (S_0 N[d_1(\sigma_n)] - Ke^{-rT} N[d_2(\sigma_n)]))}{S_0 \phi(d_1(\sigma_n))\sqrt{T}}.$$