Tutorato 5 - ICA
Soluzioni

Estremo superiore ed inferiore dell'intervallo $(a, b) \quad a < b$
Per definizione di intervallo si ha

$$\forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad x \leqslant b$$

Sia $\lambda < b$ cioè sia

$$\lambda = b - \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon > 0$$

allora

$$\exists\, y > b - \varepsilon \;\text{ t.c. }\; y \in (a, b)$$

basta infatti scegliere

$$y = \begin{cases} b - \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{se } \varepsilon < b - a \\ \dfrac{a+b}{2} & \text{se } \varepsilon \geqslant b - a \end{cases}$$

Quindi

$$\sup\,(a, b) = b$$

Analogamente si dimostra che

$$\inf\,(a, b) = a$$

e che anche per intervalli chiusi a destra, a sinistra, sia a destra che a sinistra, o con uno o entrambi gli estremi uguali a infinito (e meno infinito) il sup e l'inf sono gli estremi dell'intervallo.

Soluzioni degli esercizi

1. Dimostrare per induzione che

   (a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

   Per $n = 1$ si ha $\qquad (1-1) \cdot 1 = \frac{(1-1)1(1+1)}{3}$
   che è banalmente verificata.
   Supponiamo la relazione vera fino a $n - 1$ e dimostriamola per n.

$$
\begin{aligned}
&1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-1)\cdot n = \\
&\qquad = 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+(n-2)(n-1)+(n-1)\cdot n = \\
&\qquad = \frac{(n-2)(n-1)n}{3}+(n-1)\cdot n = \\
&\qquad = \frac{(n-2)(n-1)n+3n(n-1)}{3} = \\
&\qquad = \frac{n(n-1)(n-2+3)}{3} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}
\end{aligned}
$$

(b) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$ con $n\geqslant 2$

Per $n=2$ si ha $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
che è banalmente verificata.
Supponiamo la relazione vera fino a $n-1$ e dimostriamola per n.

$$
\begin{aligned}
&\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\prod_{k=2}^{n-1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)= \\
&\qquad = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{n}{2(n-1)}=\frac{n^2-1}{n^2}\cdot\frac{n}{2(n-1)}= \\
&\qquad = \frac{n(n+1)(n-1)}{2n^2(n-1)}=\frac{n+1}{2n}
\end{aligned}
$$

2. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dei seguenti insiemi di numeri reali e dire se si tratta del massimo o del minimo

   (a) $A=\left\{\dfrac{n}{n+1}\mid n\in\mathbb{N}\right\}$

   Verifichiamo che $\sup A=1$ e che $\inf A=\frac{1}{2}$. Si ha
   $\dfrac{n}{n+1}\leqslant 1$ infatti evidentemente $n\leqslant n+1$.
   Inoltre sia $\lambda<1$, cioè $\exists\,\varepsilon>0$ t.c. $\lambda=1-\varepsilon$.
   Allora $\exists\, a\in A$ t.c. $a>1-\varepsilon$. Basta prendere n in modo che
   $\frac{n}{n+1}>1-\varepsilon \quad\Rightarrow\quad n>n+1-n\varepsilon-\varepsilon \quad\Rightarrow\quad n\varepsilon>1-\varepsilon \quad\Rightarrow$
   $n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Quindi $\sup A=1$.
   Per quanto riguarda l'inf si ha $\dfrac{n}{n+1}\geqslant\dfrac{1}{2}$ infatti
   $2n\geqslant n+1 \quad\Rightarrow\quad n\geqslant 1$.
   Inoltre poiché per $n=1$ $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\in A \quad\Rightarrow\quad \min A=\frac{1}{2}$

(b) $A = \left\{ \dfrac{x}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$

Verifichiamo che $\sup A = \frac{1}{2}$ e che $\inf A = -\frac{1}{2}$. Si ha
$\frac{x}{x^2+1} \leqslant \frac{1}{2}$ infatti
$2x \leqslant x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0.$
Poiché per $x = 1 \quad \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \in A \quad \Rightarrow \quad \max A = \frac{1}{2}$
Analogamente per l'inf si ha
$\frac{x}{x^2+1} \geqslant -\frac{1}{2}$ infatti
$2x \geqslant -x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 \geqslant 0.$
Poiché per $x = -1 \quad \frac{x}{x^2+1} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \in A \quad \Rightarrow \quad \min A = -\frac{1}{2}$

(c) $\left\{ \dfrac{x}{x+1} \mid x \in (-2,-1) \right\}$

Verifichiamo che $\sup A = \infty$ e che $\inf A = 2$. $\forall\, M > 0$ possiamo trovare $x \in (-2,-1)$ t.c. $\frac{x}{x+1} > M$. Infatti

$$\frac{x}{x+1} > M \quad \Rightarrow \quad x < M(x+1) \quad \Rightarrow \quad x < Mx + M \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x - Mx < M \quad \Rightarrow \quad x(1-M) < M \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x > \frac{M}{1-M}$$

Inoltre $\frac{M}{1-M} < -1$, infatti $\quad \dfrac{M}{1-M} < -1 \quad \Rightarrow \quad M > M - 1$

Quindi $\sup A = \infty$

Per quanto riguarda l'inf si ha $\frac{x}{x+1} \geqslant 2$ infatti

$$\frac{x}{x+1} \geqslant 2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad x \geqslant -2$$

e questa disequazione è verificata $\forall\, x \in (-2,-1)$

Inoltre $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A$ t.c. $a < 2 + \varepsilon$

Infatti basta scegliere $x \in (-2,-1)$ in modo che $\frac{x}{x+1} < 2 + \varepsilon$:

$$\frac{x}{x+1} < 2+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad x > (x+1)(2+\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad x > 2x+\varepsilon x+2+\varepsilon \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (-1-\varepsilon)x > 2+\varepsilon \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Inoltre $-\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} > -2$, infatti

$$-\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} > -2 \quad \Rightarrow \quad 2+\varepsilon < 2+2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon > 0$$

Quindi $\inf A = 2$

(d) $A = \left\{ \dfrac{3n^2}{4n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

Verifichiamo che $\sup A = \infty$ e che $\inf A = \frac{3}{5}$. $\forall\, M > 0$ possiamo trovare n t.c. $\frac{3n^2}{4n+1} > M$. Infatti

$$\frac{3n^2}{4n+1} > M \quad \Rightarrow \quad 3n^2{+}4Mn{+}M > 0 \quad \Rightarrow \quad n > \frac{-2M + \sqrt{4M^2 - M}}{3}$$

Quindi $\sup A = \infty$

Per quanto riguarda l'inf si ha $\dfrac{3n^2}{4n+1} \geqslant \dfrac{3}{5}$ infatti

$15n^2 \geqslant 12n{+}3 \quad \Rightarrow \quad 15n^2{-}12n{-}3 \geqslant 0,$ e questa disequazione è verificata se $n \geqslant \frac{6+\sqrt{36+45}}{15} = 1$, cioè $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Poichè per $n = 1$ $\frac{3n^2}{4n+1} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \min A = \frac{3}{5}$

(e) $A = \left\{ (-1)^n \dfrac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

Verifichiamo che $\sup A = \frac{1}{3}$ e che $\inf A = -\frac{1}{2}$. Si ha

$(-1)^n \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$ infatti

$(-1)^n \cdot 3 \leqslant n+1$ è verificata per n dispari, e per n pari con $n \geqslant 2$ cioè $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Poichè per $n = 2$ $\frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \max A = \frac{1}{3}$

Per quanto riguarda l'inf si ha $\dfrac{(-1)^n}{n+1} \geqslant -\dfrac{1}{2}$ infatti

$(-1)^n \cdot 2 \leqslant -n-1 \quad \Rightarrow \quad (-1)^{n+1} \cdot 2 \geqslant n+1$ che di nuovo è verificata $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Poichè per $n = 1$ $\frac{(-1)^n}{n+1} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \min A = -\frac{1}{2}$

(f) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 8 \right\}$

Poiché $\quad x^3 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$

$\Rightarrow \quad A = (-\infty, 2) \quad \Rightarrow \quad \sup A = 2 \qquad \inf A = -\infty$

(g) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geqslant 3x - 2\}$

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x{+}1 \geqslant 3x{-}2 \quad \Leftrightarrow \quad x{-}3x \geqslant -2{-}1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{3}{2}$$

Quindi $A = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \max A = \frac{3}{2} \qquad \inf A = -\infty$

(h) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 5 \leqslant 3x + 4\}$

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x + 5 \leqslant 3x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3x \leqslant 4 - 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{1}{2}$$

Quindi $A = \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \quad \Rightarrow \quad \sup A = \infty \qquad \min A = \frac{1}{2}$

(i) $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\right\}$

Verifichiamo che $\sup A = \sqrt{2}$ e che $\inf A = -\sqrt{2}$. Si ha

$$x^2 \leqslant 2 \quad \Rightarrow \quad x \leqslant \sqrt{2}$$

e inoltre $\forall\, \lambda < \sqrt{2}$ poichè $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ esiste sempre un $q \in \mathbb{Q}$ t.c. $\lambda < q < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sup A = \sqrt{2}$.
Analogamente si mostra che $\inf A = -\sqrt{2}$

(j) $A = (0, 1] \cup [2, 3]$

$\max A = 3 \qquad \inf A = 0$

(k) $A = (-\infty, 4] \cap (1, 5)$

$A = (1, 4] \quad \Rightarrow \quad \max A = 4 \qquad \inf A = 1$

(l) $A = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots\right\}$

Verifichiamo che $\sup A = 1$ e che $\inf A = 0$. Si ha ovviamente $\frac{1}{n} \leqslant 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ e poiché $1 \in A \quad \Rightarrow \quad \max A = 1$
Per quanto riguarda l'inf si ha $\frac{1}{n} \geqslant 0$. Inoltre $\forall\, \lambda > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{n} < \lambda$. Basta scegliere $n > \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \inf A = 0$

(m) $A = \left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{(-1)^n}{n}, \ldots\right\}$

Verifichiamo che $\sup A = \frac{1}{2}$ e che $\inf A = -1$.
Si ha per n dispari, $n = 2k - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(-1)^n}{n} = \frac{-1}{2k-1} \leqslant \frac{1}{2}$
e per n pari, $n = 2k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2k} \leqslant \frac{1}{2} \quad$ infatti $2k \geqslant 2$
Analogamente per l'inf si ha per $n = 2k - 1$

$\frac{-1}{2k-1} \geqslant -1 \quad$ infatti $\quad \frac{1}{2k-1} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 2k-1 \geqslant 1$
e per $n = 2k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2k} \geqslant -1$
Inoltre poiché $-1 \in A$ e $\frac{1}{2} \in A \quad \Rightarrow \quad \max A = \frac{1}{2} \quad \min A = -1$

(n) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in \mathbb{Q}\}$

Verifichiamo che $\sup A = \infty$ e che $\inf A = -\infty$.
$\forall\, M > 0 \quad$ sia $N = [M] + 1$
Allora $N > M$ e $N^2 \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad N \in A$
Quindi $\sup A = \infty$. Analogamente si dimostra che $\inf A = -\infty$.