Tutorato 4 - ICA
Soluzioni

Risolvere le seguenti disequazioni:

1. $\log x + \log(x-2) \geqslant \log 15$

   Le condizioni di esistenza sono $x > 0$ e $x > 2$. Applicando le proprietà dei logaritmi otteniamo

   $\log\left(x(x-2)\right) \geqslant \log 15 \quad \rightarrow \quad x(x-2) \geqslant 15 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$ Le soluzioni di questa disequazione di 2° grado sono $x \leqslant -3$ e $x \geqslant 5$ ma per la condizione di esitenza è accettabile solo $x \geqslant 5$

2. $e^{-x^2+5} \leqslant 3$

   Facendo il logaritmo ad entrambi i membri si ha

   $-x^2 + 5 \leqslant \log 3 \quad \rightarrow \quad -x^2 + 5 - \log 3 \leqslant 0$

   La soluzione è $\{x \leqslant -\sqrt{5 - \log 3}\} \cup \{x \geqslant \sqrt{5 - \log 3}\}$

3. $2\sin x - 1 < 0$

   $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{13}{6}\pi + 2k\pi$

4. $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

   $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

5. $\tan x > -\sqrt{3}$

   $-\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

6. $\sin x \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$

   $\frac{5}{4}\pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$

7. $\cos x \geqslant -\frac{1}{2}$

   $-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$

8. $\tan x > \sqrt{3}$

   $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

9. $\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} > 0$

   Con la sostituzione $X = \cos x \quad Y = \sin x$ si ha $X + \sqrt{3}Y - \sqrt{3} > 0 \quad \rightarrow$ $\sqrt{3}Y > -X + \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad Y > -\frac{1}{\sqrt{3}}X + 1$

   mettendo a sistema con la circonferenza unitaria si ottiene

$$\begin{cases} Y = -\frac{1}{\sqrt{3}}X + 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$X^2+\dfrac{1}{3}X^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}X+1 = 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{4}{3}X^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}X = 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{2}{\sqrt{3}}X\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}X - 1\right) = 0$

le cui soluzioni sono $X = 0 \quad X = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Poiché per $(X, Y) = (0, 0)$ la disequazione $Y > -\frac{1}{\sqrt{3}}X + 1$ non è soddisfatta, la soluzione è $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

10. $2\sin^2 x + 4\cos^2 x > 5\cos x$

    $2\sin^2 x + 4\cos^2 x > 5\cos x \quad \rightarrow$

    $2(1-\cos^2 x)+4\cos^2 x-5\cos x > 0 \quad \rightarrow \quad 2-2\cos^2 x+4\cos^2 x-5\cos x > 0 \quad \rightarrow \quad 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 > 0$

    Con la sostituzione $y = \cos x$ si ha

    $2y^2 - 5y + 2 > 0 \quad \rightarrow \quad \{y < \frac{1}{2}\} \cup \{y > 2\}$

    cioè $\{\cos x < \frac{1}{2}\}$. Dunque la soluzione è $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$

11. $\dfrac{1 - 2\sin x}{\cos x} \leqslant 0$

    Studiamo separatamente il numeratore e il denominatore. Per quanto riguarda il numeratore, è $\geqslant 0$ per $\frac{5}{6}\pi+2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{13}{6}\pi+2k\pi$. Il denominatore è maggiore di zero per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$. La soluzione quindi sarà

    $$\left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x \leqslant \frac{13}{6}\pi + 2k\pi\right\}$$

12. $\dfrac{2\sin^2 x - 11\sin x + 5}{\cos x} \geqslant 0$

    Di nuovo studiamo separatamente numeratore e denominatore. Per quanto riguarda il numeratore, con la sostituzione $\sin x = y$ si ha

    $2y^2 - 11y + 5 \geqslant 0 \quad \rightarrow \quad \{y \leqslant \frac{1}{2}\} \cup \{y \geqslant 5\}$

    cioè $\{\sin x \leqslant \frac{1}{2}\}$. Dunque il numerarore è $\geqslant 0$ per

    $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{13}{6}\pi + 2k\pi$. Il denominatore è maggiore di zero per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$. La soluzione quindi sarà

    $$\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leqslant \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x \leqslant \frac{13}{6}\pi + 2k\pi\right\}$$

13. $4\sin x\tan x - \dfrac{3}{\cos x} \leqslant 0$

14. $\cos(2x) + \cos x < 0$

15. $(4 - \sqrt{6})\sin^2 x - \sqrt{6}\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \geqslant 2\sqrt{2}\sin x$

Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione:

$\sqrt{\log(\arcsin(x^2-6x+5))}$

$\log(\arcsin(x^2-6x+5)) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin(x^2-6x+5) \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow$

$\arcsin(x^2-6x+5) = 1$ perchè $\arcsin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$

$\arcsin(x^2-6x+5) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-6x+5 = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-6x+5-\frac{\pi}{2} = 0$

Dunque l'insieme di definizione è $\left\{3+\sqrt{4+\frac{\pi}{2}}, 3-\sqrt{4+\frac{\pi}{2}}\right\}$

Dimostrare per induzione che:

1. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$
3. $(1+a)^n \leqslant 1+na+\dfrac{n^2a^2}{2}$ se $a \in (-1,0)$

   Per $n=1$ si ha
   $$1+a \leqslant 1+a+\frac{a^2}{2}$$
   che è banalmente verificata. Supponiamo la relazione vera per n e dimostriamola per $n+1$.
   $$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) &\leqslant \left(1+na+\frac{n^2a^2}{2}\right)(1+a) = \\ &= 1+na+\frac{n^2a^2}{2}+a+na^2+\frac{n^2a^3}{2} = \\ &= 1+(n+1)a+\frac{n^2a^2+2na^2+n^2a^3}{2} = \\ &= 1+(n+1)a+\frac{a^2(n^2+2n+n^2a)}{2} \leqslant \\ &\leqslant 1+(n+1)a+\frac{a^2(n+1)^2}{2}\end{aligned}$$
   perché $a<0$
4. $n! \geqslant 2^{n-1}$
5. $2^n > n^2$ se $n \geqslant 4$