Tutorato 11 - ICA
Soluzioni

a) Dire se convergono le serie seguenti

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{5n}\right)^n$ si, criterio della radice
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$ si, criterio degli infinitesimi, n^3
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n+1}$ si, criterio degli infinitesimi, n^2
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^3}$ si, criterio degli infinitesimi, n^2
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-n+1}{n^4+3}$ si, criterio degli infinitesimi, n^2
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3-2n}$ no, criterio degli infinitesimi, n
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ si, criterio del rapporto
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^6+2n^3+1}}$ si, criterio degli infinitesimi, n^2
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}$ si, criterio del rapporto
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$ si, criterio degli infinitesimi, n^2
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ no, criterio della radice
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^n}$ si, criterio della radice

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$ si, criterio del rapporto

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ si, criterio degli infinitesimi, n^2

b) Dire per quali valori $x > 0$ convergono le seguenti serie

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^x + 1} - \sqrt{n^x}\right)$

Si ha

$$\left(\sqrt{n^x + 1} - \sqrt{n^x}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{n^x + 1} + \sqrt{n^x}\right)}{\left(\sqrt{n^x + 1} + \sqrt{n^x}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{n^x + 1} + \sqrt{n^x}\right)}$$

e applicando il criterio degli infinitesimi si ha

$$\lim_{n\to\infty} n^{x/2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{n^x + 1} + \sqrt{n^x}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^{-x}}\left(\sqrt{n^x + 1} + \sqrt{n^x}\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^x}} + 1} = \frac{1}{2} \qquad \forall x > 0$$

Quindi la serie diverge per $0 < x \leqslant 2$ e converge per $x > 2$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + nx)}{nx^{n+1}}$

Applicando il criterio della radice si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(1 + nx)}{nx^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sqrt[n]{\frac{\log(1 + nx)}{nx}} = \frac{1}{x}$$

Quindi la serie converge per $x > 1$ e diverge per $0 < x < 1$. Per $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + n)}{n}$$

che ovviamente diverge.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!x^n}{(n!)^2}$ Applicando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!x^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!x^n}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!x^{n+1}(n!)^2}{((n+1)!)^2(2n)!x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)x}{(n+1)^2} = 4x$$

Quindi se $0 < x < 1/4$ converge, mentre se $x > 1/4$ diverge. Il criterio del rapporto non ci dà alcuna informazione nel caso in cui $x = 1/4$.