

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005**  
**GE3 - Topologia Generale ed Elementi di Topologia Algebrica**  
**Tutorato 9**  
Giovedì 19 Maggio 2005

1. Verificare che ogni sottoinsieme dello spazio topologico  $(\mathbb{R}, i_s)$  è connesso.
2. Verificare che lo spazio topologico  $(\mathbb{R}, j_s)$  è totalmente sconnesso.  
( $j_s$  topologia su  $\mathbb{R}$  che ha per base  $\mathcal{B} := \{(a, b] \subset \mathbb{R}, \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ ).
3. Sia  $(X, \mathcal{T})$  uno spazio topologico, sia  $E \subset X$  non vuoto.  
Verificare che:
  - (a) Se  $E$  è connesso, aperto e chiuso, allora è una componente connessa;
  - (b) Non è vero il viceversa.
4. Nello spazio topologico euclideo  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}^2)$   
sia
$$Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}.$$
  - (a) Verificare che  $Y$  è connesso;
  - (b) verificare che  $Y - \{0\}$  ha quattro componenti connesse;
  - (c) mostrare che  $Y$  non è omeomorfo alla retta  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ .
5. Sia  $\mathcal{K}$  la topologia cofinita su di un insieme  $X$  infinito.
  - (a) Verificare che  $(X, \mathcal{K})$  è connesso;
  - (b) Studiare i sottoinsiemi di  $(X, \mathcal{K})$  rispetto alla connessione.
6. Verificare che lo spazio topologico  $(\mathbb{Z}, \mathcal{K})$  è connesso e localmente connesso.