Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005
GE3 - Topologia Generale ed Elementi di Topologia Algebrica
Tutorato 1
Giovedì 3 Marzo 2005

1. Dimostrare che: $d(x,y) := \min_i \{\mid x_i - y_i \mid\}$, $i = 1, \dots, n$ non è una metrica in $\mathbb{R}^n$.

2. Sia (X, d_1) uno spazio metrico discreto. Determinare l'insieme dei dischi di centro $x \in X$ rispetto alla metrica d_1 e l'insieme degli aperti. Verificare che d_1 non è topologicamente equivalente alla metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$ $\left(d(x,y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \right)$.

3. Sia $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme finito. Dimostrare che ogni metrica d su X è topologicamente equivalente alla metrica discreta.

4. Sia
$$S := \left\{ 0, \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1 \right\} \subset \mathbb{R}$$
Consideriamo d_S la metrica euclidea indotta su S e d_1 la metrica discreta indotta su S.
   (a) Verificare che d_S e d_1 non sono topologicamente equivalenti su S.
   (b) Sia $X := S \setminus \{0\}$, siano d_X la metrica euclidea su X e d_1 la metrica discreta su X. Verificare che d_X e d_1 sono topologicamente equivalenti su X.
   (c) Sia $\mathcal{I}_S : S \longrightarrow S$ l'identità su S. Verificare che:
$$\mathcal{I}_S : (S, d_S) \longrightarrow (S, d_1) \quad \text{non è continua,}$$
$$\mathcal{I}_S : (S, d_1) \longrightarrow (S, d_S) \quad \text{è continua.}$$

5. Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo su X $\delta(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Dopo aver verificato che δ è una metrica su X, dimostrare che d e δ sono topologicamente equivalenti. (**Suggerimento** : Per dimostrare che vale la disuguaglianza triangolare per δ si ricorda che $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow a \leq b, \forall c > 0$.)