Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

03/05/2005

Esercizio 1. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Sia S un sottoinsieme non vuoto e chiuso di X. Sia $p : (X, \mathcal{T}) \to (X/S, \mathcal{T}_{X/S})$ la proiezione canonica che identifica S con un punto. Verificare che:

1. per ogni disco $D \subset X$,

$$p^{-1}(p(D)) \quad = \quad \begin{cases} D & \text{se} \quad S \cap D = \emptyset \\ D \cup S & \text{se} \quad S \cap D \neq \emptyset \end{cases}$$

2. se $S \in \mathcal{T}$ allora p è aperta. Il viceversa non vale;
3. se $S \notin \mathcal{T}$ e se p è aperta allora $Int(S) = \emptyset$. Il viceversa non vale.

Esercizio 2. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Sia $S \subset X$ un sottoinsieme chiuso. Sia $(X/S, \mathcal{T}_{X/S})$ lo spazio topologico quoziente in cui si identifica S con un punto.
Dimostrare che:

1. se $(X, \mathcal{T})$ è T1 allora $(X/S, \mathcal{T}_{X/S})$ è T1;
2. se $(X, \mathcal{T})$ è T2 allora $(X/S, \mathcal{T}_{X/S})$ non è necessariamente T2;
3. se $(X, \mathcal{T})$ è T3 allora $(X/S, \mathcal{T}_{X/S})$ è T2;
4. se $(X, \mathcal{T})$ è T4 allora $(X/S, \mathcal{T}_{X/S})$ è T4.

Esercizio 3. Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio topologico T4 e sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ suriettiva, continua e chiusa allora $(Y, \mathcal{T}_Y)$ è T4.