Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza -
Tutore: I. Olivieri

19/04/2005

Esercizio 1. Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio toplogico. Dimostrare che X è T1 se solo se i punti sono chiusi.

Esercizio 2. Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio toplogico. Dimostrare che X è T2 se e solo se la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$.

Esercizio 3. Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio toplogico. Dimostrare che X è T2 se e solo se per ogni $x \in X$ l'intersezione

$$\bigcap_{F \in \mathcal{C}(X)} (F \cap N_x) = \{x\}$$

dove $\mathcal{C}(X)$ denota l'insieme dei chiusi di X e N_x è un intorno di x.

Esercizio 4 (Topologia di Zarisky)**.** Sia K un campo e sia K^n lo spazio affine numerico n-dimensionale (con $n \geq 0$). Sia $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi a n indeterminate ed a coefficienti in K. Per ogni $S \subset R$ definiamo

$$V(S) = Z(S) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in S\}$$

$V(S)$ è detto **insieme algebrico deinito da** S.
Sia infine, $\mathcal{C} = \{V(S) \mid \forall S \subset R\}$.
Verificare che $\mathcal{C}$ è la famiglia dei chiusi di una topologia $\mathcal{Z}$ su K^n. $\mathcal{Z}$ è detta topologia di Zariski su K^n e $(K^n, \mathcal{Z})$ è lo spazio affine n-dimensionale.