Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

08/03/2005

Esercizio 1. Sia X un insieme non vuoto e sia

$$\mathcal{T} = \{U \subset X \mid X - U \text{ è infinita}\} \cup \{X\}$$

Dimostrare che $\mathcal{T}$ non è una topologia e quindi che $(X, \mathcal{T})$ non è uno spazio topologico.

Soluzione. $\mathcal{T}$ non è una topologia perché l'unione arbitraria (o finita) di insiemi infiniti non è detto che abbia come insieme complementare un insieme infinito.

Esempio 1. Sia $X = \mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri relativi e definiamo su X la topologia data prima. Siano in X gli aperti:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{k \in \mathbb{Z} \mid k > 1\} \\ U_2 &= \{k \in \mathbb{Z} \mid k < 0\} \end{aligned}$$

Consideriamo $U_1 \cup U_2$ allora $X - (U_1 \cup U_2) = \{0, 1\}$ che non appartiene a $\mathcal{T}$ dal momento che l'insieme $\{0, 1\}$ non è infinito.

Esercizio 2. Sia X un insieme non vuoto e sia $\{\mathcal{T}_j\}_{j \in J}$ una famiglia di topologie su X. Sia $\mathcal{T} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_j$. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia e quindi che $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico.

Soluzione. Dobbiamo verificare che:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. Dati $U_i \in \mathcal{T}$ si ha $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;
3. Dati $U_i \in \mathcal{T}$ si ha $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$

Dimostrazione 1.
$\emptyset, X \in \mathcal{T}$ perché $\emptyset, X \in \mathcal{T}_j \quad \forall j \in J$ per definizione di topologia.

Dimostrazione 2.
Siano $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{T}$ allora $U_i \in \mathcal{T}_j \quad \forall j \in J$ perché $\mathcal{T} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_j$.
Per definizione di topologia $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_j \quad \forall j \in J$ e quindi $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Dimostrazione 3.
Siano $\{U_i\}_{i=1,\dots,n} \in \mathcal{T}$ allora $U_i \in \mathcal{T}_j \quad \forall j \in J$ perché $\mathcal{T} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{T}_j$. Per definizione di topologia $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_j \quad \forall j \in J$ e quindi $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

Esercizio 3. Sia X un insieme non vuoto e sia $\{\mathcal{T}_k\}_{k\in K}$ una famiglia di topologie (che non siano la topologia discreta) su X. Sia $\mathcal{T} = \bigcup_{k\in K} \mathcal{T}_k$. Dimostrare che $\mathcal{T}$ non è una topologia e quindi che $(X, \mathcal{T})$ non è uno spazio topologico.

Soluzione. Verifichiamo che:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. Dati $U_i \in \mathcal{T}$ si ha $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$;
3. Dati $U_i \in \mathcal{T}$ si ha $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \notin \mathcal{T}$

Dimostrazione 1.
$\emptyset, X \in \mathcal{T}$ perché $\emptyset, X \in \mathcal{T}_k \quad \forall k \in K$ per definizione di topologia.

Dimostrazione 2.
Siano $\{U_i\}_{i\in I} \in \mathcal{T}$ allora $\forall i$ $U_i \in \mathcal{T}$ $\exists k_i \in K$ tale che $U_i \in \mathcal{T}_{k_i}$ allora $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Dimostrazione 3.
In questo caso dati $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ si ha che $\exists k_1, k_2$ tali che $U_1 \in \mathcal{T}_{k_1}$ e $U_2 \in \mathcal{T}_{k_2}$ ma questo non consente di dire che $\exists k$ tale che $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_k$ e quindi che $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Esempio 2. Sia $X = \{a, b, c\}$ e siano su X le seguenti topologie:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\} \\ \mathcal{T}_2 &= \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\} \end{aligned}$$

e si considerino $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ e $\overline{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. La prima è una topologia perché:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. unioni arbitrarie di elementi di $\mathcal{T}$ appartengono a $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} &\emptyset \cup X = X \\ &\emptyset \cup \{a\} = \{a\} \\ &X \cup \{a\} = X \\ &\emptyset \cup X \cup \{a\} = X \end{aligned}$$

3. intersezioni finite di elementi $\mathcal{T}$ appartengono a $\mathcal{T}$

$$\begin{aligned} &\emptyset \cap X = \emptyset \\ &\emptyset \cap \{a\} = \emptyset \\ &X \cup \{a\} = \{a\} \\ &\emptyset \cup X \cup \{a\} = \emptyset \end{aligned}$$

La seconda non è una topologia perché

$$\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\} \notin \overline{\mathcal{T}}$$

e quindi viene meno una delle ipotesi per cui $\overline{\mathcal{T}}$ sia una topologia