Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

31/05/2005

Esercizio 1 (Esempio di spazio connesso ma non localmente connesso)**.** Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ e siano $B = (] \times \{0\}$ (base del pettine) e $D_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1] \quad \forall n \geq 1$ (dente del pettine) e il punto $P = (0,1)$. Definiamo $X = B \cup \bigcup_{n \geq 1} D_n \cup P$ e consideriamo lo spazio topologico $(X, \mathcal{E}\big|_X)$.
Dimostrare che $(X, \mathcal{E}\big|_X)$ è connesso ma non localmente connesso.

Esercizio 2. Dimostrare che:

1. Sia $p : R \to X$ un rivestimento allora p è aperto
2. Sia $(Y, \mathcal{P}(Y))$ uno spazio topologico e sia $(X, \mathcal{T}_X)$ un altro spazio topologico. Allora $p : X \times Y \to X$ è un rivestimento.

Esercizio 3.

1. Sia $(X, \mathcal{E}\big|_X) \subset (\mathbb{R}^2, \mathcal{E})$ lo spazio topologico formato dalle tre rette del piano di equazione $x = 0, x = 1, x = 2$. Stabilire se tale spazio è connesso oppure no.
2. Sia $(X, \mathcal{E}\big|_X) \subset (\mathbb{R}^2)$ lo spazio topologico formato dalle rette del piano di equazione $x = 0, x = 1, x = 2, y = 1$. Stabilire se tale spazio è connesso oppure no.

Esercizio 4. Dimostrare che $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi

Esercizio 5. Sia $(X, \mathcal{T}_X)$ uno spazio topologico e sia ρ una relazione di equivalenza in X. Definiamo $(X/\rho, \mathcal{T}_\rho)$ lo spazio topologico quoziente. Dimostrare che se $(X, \mathcal{T}_X)$ è localmente connesso allora $(X/\rho, \mathcal{T}_\rho)$ è localmente connesso.