Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

17/05/2005

Esercizio 1. Sia C un sottoinsieme compatto di $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Verificare che $Fr(C)$ è compatto.

Esercizio 2. Se $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ è una identificazione allora $\forall C \subset Y$ compatto $f^{-1}(C)$ non è detto sia compatto.

Esercizio 3. Sia C un sottoinsieme compatto di $(\mathbb{R}, j_s)$. Verificare che C verifica le seguenti condizioni:

1. $Int(C) = \emptyset$;
2. C è chiuso;
3. C è contenuto in un chiuso e limitato.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{Z}$ e sia $\mathcal{S}$ la famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ così definita:

$$\mathcal{S} = \{V_x = \{x, x+1\} \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\ \}$$

Dimostrare che:

1. esiste un'unica topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{Z}$ che ha $\mathcal{S}$ come sottobase;
2. $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ non è compatto e non è n-compatto;
3. $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ non è s-compatto.

Esercizio 5. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia F un chiuso di X. Verificare che:

1. se $(X, \mathcal{T})$ è s-compatto allora F è s-compatto;
2. se $(X, \mathcal{T})$ è n-compatto allora F è n-compatto.

Esercizio 6. Sia $X = \{a, b, c\}$ e siano due topologie su X: $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ non banali e non discrete tali che $\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2$. Determinare $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ in modo che $(X, \mathcal{T}_1)$ sia connesso e $(X, \mathcal{T}_2)$ sia sconnesso.

Esercizio 7. Sia X un insieme infinito e sia $\mathcal{K}$ la topologia cofinita.

1. Dimostrare che $(X, \mathcal{K})$ è connesso.
2. Caratterizzare in termini di cardinalità i sottoinsiemi di $(X, \mathcal{K})$.

Esercizio 8. Siano S, S' le circonferenze di raggio 1 e centri $(1,0), (-1,0)$ e sia $X = S \cup S'$. Dimostrare che X è connesso e che $(0,0)$ lo sconnette.