Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2004/2005
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa T. Vistarini
Tutori: Andrea Agnesse & Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/*

Tutorato n.3 del 17/3/2005

Esercizio 1 Per ognuna delle seguenti coppie di insiemi, dire se il primo è uno spazio vettoriale sul secondo (dove non altrimenti specificato, si intendono la somma e il prodotto usuali).

(a) $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$
(b) $(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$
(c) $(C_{[a,b]}, \mathbb{R})$ con $C_{[a,b]} = \{f(x) : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f(x)$ é continua$\}$, $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$
(d) $(M_n(\mathbb{Z}_5), \mathbb{Z}_5)$ dove $\mathbb{Z}_5 = \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$
(e) $(\{M_n = {}^tM_n\}, \mathbb{R})$

Esercizio 2 Sia $\mathcal{A} \in M_n$ una matrice invertibile; dimostrare che ${}^t(\mathcal{A}^{-1}) = ({}^t\mathcal{A})^{-1}$

Esercizio 3 Dati $\mathcal{V}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ suoi sottospazi vettoriali, dimostrare che $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in \mathcal{W}_1 \text{ e } u_2 \in \mathcal{W}_2\}$ è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 4 Dati $\mathcal{V}$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ suoi sottospazi vettoriali, dimostrare che $\mathcal{W}_1 \star \mathcal{W}_2 = \{au_1 + bu_2 \mid u_1 \in \mathcal{W}_1,\ u_2 \in \mathcal{W}_2 \text{ e } a, b \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale.

Esercizio 5 Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono spazi vettoriali:

(a) $\mathcal{W}_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$
(b) $\mathcal{W}_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c \leqslant 1\}$
(c) $\mathcal{W}_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 = 0\}$
(d) $\mathcal{W}_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2b + c = 1\}$

Esercizio 6 Dire se il seguente insieme è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$:

$$\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \in M_2\left(\mathbb{R}\right) \mid a \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 7 Risolvere i seguenti sistemi di equazioni:

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 1 \\ -x_1 + x_4 - x_5 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{(c)} \begin{cases} x_1 - \frac{3}{2}x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 3x_4 = 5 \\ \frac{1}{2}x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$