Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE1 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005

Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini -
Tutori:A.Agnesse, N. Maroni

Esercitazione del 30/3/2005

Dipendenza e indipendenza lineare.
Basi e dimensione di uno spazio vettoriale.
Formula di Grasmann.

1 Sia $V = \mathbb{R}^3$, spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Verificare che i vettori $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$, $w = (5, 3, -2)$ sono linearmente dipendenti.

2 Sia $V = \mathbb{R}^4$, spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Verificare che i vettori $u = (6, 2, 3, 4)$, $v = (0, 5, -3, 1)$, $w = (0, 0, 7, -2)$ sono linearmente indipendenti.

3 Sia $V = M_2(\mathbb{R})$, spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Stabilire se le seguenti matrici $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ $\in$ V sono linearmente indipendenti o dipendenti:

$$\mathcal{A} = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 Sia $V = \mathbb{R}^3$, spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.
Siano u, v, w tre vettori linearmente indipendenti.
Dimostrare che $u + v$ $u - v$ $u - 2v + w$ sono anche essi linearmente indipendenti.

5 Sia $\mathbb{C}^2$, spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.
Dimostrare che i due vettori $v = (1+i, 2i)$, $w = (1, 1+i)$ sono linearmente dipendenti in $\mathbb{C}^2$ come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale , mentre sono linearmente indipendenti come vettori di $\mathbb{C}^2$ visto come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

6 Sia $V = \mathbb{R}^3$.
Verificare se e' possibile scrivere il vettore $v = (1, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$ come combinazione lineare di $u_1 = (1, -3, 2)$ $u_2 = (2, -4, -1)$ $u_3 = (1, -5, 7)$.

7 Sia $V = M_2(\mathbb{R})$.
Scrivere la matrice $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare delle seguenti matrici :

$$\mathcal{A} = \{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8 Sia $V = \mathbb{R}^3$.
Trovare una condizione sui parametri reali $a, \ b, \ c \in \mathbb{R}$ affinche' il vettore $w = (a, b, c)$ si possa scrivere come combinazione lineare dei vettori $u = (1, -3, 2), \ v = (2, -1, 1)$.

9 Sia $V = \mathbb{R}^3$.
Verificare se i vettori $u = (1, 1, 1), \ v = (1, 2, 3), \ w = (2, -1, 1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

10 (1) Dimostrare che $\mathbb{C}$ e' uno spazio vettoriale di dimensione due su $\mathbb{R}$.
(2) Dimostrare che $\mathbb{R}$ e' uno spazio vettoriale di dimensione infinita su $\mathbb{Q}$.

11 Trovare una base e la dimensione del sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1, -4, -2, 1) \ u_2 = (1, -3, -1, 2) \ u_3 = (3, -8. - 2, 7)$.

12 Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u_1 = (1, -2, 5, -3) \ u_2 = (2, 3, 1, -4)$ $u_3 = (3, 8. - 3, -5)$.
Determinare una base di W.
Estendere la base trovata ad una base di $\mathbb{R}^4$.

13 Sia $V = \mathbb{R}^4$.
Siano U e W i seguenti sottospazi di V:

$$U =< (1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1) >$$

$$W =< (1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3) >$$

determinare:
(a) $\dim(U + W)$
(b) $\dim(U \bigcap W)$.