UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 20-6-2005 - a.a. 2004-2005

1. (a) Si definiscano le nozioni di dimensione (finita) di uno spazio vettoriale reale e di sottospazio;

Sia ora V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e W un suo sottospazio.

(b) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di V e di W;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in\mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_4 = 0 \\ hX_1 + X_3 + X_4 = 1 \\ -X_1 + X_3 - hX_4 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Sia a un numero reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & a \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a per i quali A si può esprimere come prodotto di matrici elementari e si scriva esplicitamente tale prodotto.

4. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 - ke_3, v_2 = ke_2 - e_3 + e_4, v_3 = ke_1 - ke_2, v_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

(a) Siano $U =< v_1, v_2, v_2 + v_3 >, W =< v_1, v_2, v_4 >$ i sottospazi generati. Si calcoli la dimensione di U e di W;

(b) si determini se esistono valori di k tali che $U \subset W$;

(c) si determini se esistono valori di k tali che $dim U \cap W = 2$.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $F : V \to V$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano le nozioni di autovalore, autovettore e di polinomio caratteristico di F;

(b) Si enunci il risultato che relaziona gli autovalori, gli autospazi ed il polinomio caratteristico di F;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia Oe_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Siano $A(-1,1,0), B(0,1,2)$ e $C(1,1,1)$ tre punti di $\mathbf{A}$ e R la retta in $\mathbf{A}$ di equazioni cartesiane $\begin{matrix} X - Y + Z + 2 = 0 \\ X + 3Y - Z - 1 = 0 \end{matrix}$.

(a) Determinare se esistono punti P appartenenti alla retta $\overline{AB}$ tali che la retta $\overline{PC}$ è complanare con R.

(b) Determinare se esistono punti P **non appartenenti** alla retta $\overline{AB}$ tali che la retta $\overline{PC}$ è parallela ad ogni piano parallelo ad R.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $F : V \to W$ un'applicazione lineare e sia U un sottospazio di W.

(a) Si determinino le condizioni necessarie e sufficenti su F ed U sotto le quali $V/N(F) \cong W/U$;

(b) si determinino le condizioni necessarie e sufficenti su F sotto le quali $V/N(F) \cong W/U$ e $U \supset \mathrm{Im}(F)$;

(c) si determinino le condizioni necessarie e sufficenti su F ed U sotto le quali $V/N(F) \cong W/U$ e $U \oplus \mathrm{Im}(F) = W$.

8. Sia a un numero reale e sia $A \in M_4(\mathbb{R})$ la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & a \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) trovare basi per gli autospazi di A;

(c) determinare i valori di a per i quali A è diagonalizzabile.