AM5: Tracce delle lezioni- II Settimana

Definizione 1: Funzioni misurabili. Siano X un insieme , $\Sigma \subset P(X)$ sigma algebra . Una funzione $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é misurabile se se vale una delle (tra loro equivalenti) affermazioni

$$(i)\ \{x \in X : f(x) \le c\} \in \Sigma\ \ \forall c \in \mathbf{R} \quad (ii)\ \{x \in X :\ f(x) > c\} \in \Sigma\ \forall c \in \mathbf{R}$$

$$(iii)\ \ \{f(x) < c\} \in \Sigma\ \forall c \in \mathbf{R} \quad (iv)\ \ \{f(x) \ge c\} \in \Sigma\ \ \forall c \in \mathbf{R}$$

Nota. Se μ é **misura completa**, cioé $N_0 \subset N \in \Sigma$, $\mu(N) = 0 \Rightarrow N_0 \in \Sigma$, allora f misurabile, $\mu(\{x : g(x) \ne f(x)\}) = 0 \Rightarrow\ \ g$ é misurabile.

Esempi. La funzione caratteristica di un insieme A, χ_A, é misurabile se e solo se $A \in \Sigma$.
Sia $X = \mathbf{R}^N$ e Σ la classe dei boreliani. Se f é inferiormente/superiormente semicontinua (cioé $f^{-1}((-\infty, c])$ é chiuso/$f^{-1}((-\infty, c))$ é aperto, per ogni $c \in \mathbf{R}$) allora f é (borel) misurabile.

Proposizione 1. Siano $f,\ g : X \to (-\infty, +\infty)$ misurabili. Allora

(i) $tf + sg,\ \ t, s \in \mathbf{R},\ fg,\ f^+(x) := \max\{f(x), 0\},\ f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}, |f|$; sono misurabili; $\frac{1}{f}$ é misurabile se $\mu(\{f = 0\}) = 0$.

(ii) f_n misurabili $\Rightarrow \inf_n f_n(x),\ \ \sup_n f_n(x),\ \ \liminf_n f_n(x),\ \ \limsup_n f_n(x)$ sono funzioni misurabili

Verifica di (i): La misurabilitá di tf, $\frac{1}{f}$ segue subito dalla definizione. Poi, $f + g$ é misurabile perché $\{f + g < c\} = \cup_{\{r,s \in \mathbf{Q},\ r+s<c\}}(\{f < r\} \cup \{g < s\}) \in \Sigma$, perché, se $f(x) + g(x) < c$, esistono $r, s \in \mathbf{Q}$ tali che $f(x) < r < \frac{c}{2} + \frac{f(x)-g(x)}{2}$, $g(x) < s < \frac{c}{2} - \frac{f(x)-g(x)}{2}$ (ció prova "$\subset$"; l'altra inclusione é ovvia). Si vede poi subito che f misurabile $\Rightarrow f^2$ é misurabile, e quindi $fg = \frac{f^2+g^2-(f-g)^2}{2}$ é misurabile, e quindi $f^+ = f\chi_{\{f\ge 0\}},\ \ f^- = -f\chi_{\{f\le 0\}},\ \ |f| = \frac{f^+ + f^-}{2}$ sono misurabili

Verifica di (ii): $\{x :\ \inf_n f_n(x) \ge c\} = \cap_n\{x :\ f_n(x) \ge c\} \in \Sigma$, $\{x :\ \sup_n f(x \le c\} = \cap_n\{x :\ f_n(x) \le c\} \in \Sigma$, $\liminf_n f_n(x) = \sup_n \inf_{k\ge n} f_k(x)$, $\limsup_n f_n(x) = \inf_n \sup_{k\ge n} f_k(x)$.

Proposizione 2. Sia $f \ge 0$ misurabile. Allora

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}(x) \quad \forall x \in X$$

ove (induttivamente) $\quad E_1 := \{x : f(x) \geq 1\}, E_n := \{x : f(x) \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\chi_{E_j}}{j} + \frac{1}{n}\}, n \in N$

Dimostrazione. Posto $g(x) := \sum_j \frac{1}{j} \chi_{E_j}$, proviamo che $f = g$.

É $f(x) \geq g(x)$. Infatti: $x \notin \cup_j E_j \Rightarrow g(x) = 0, \quad x \in E_n \setminus \cup_{k \geq n+1} E_k \Rightarrow f(x) \geq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\chi_{E_j}}{j} + \frac{1}{n} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{\chi_{E_j}}{j} = g(x)$; infine, $\exists j_k \to +\infty : \ x \in E_{j_k} \ \forall k \Rightarrow f(x) \geq \sum_{j=1}^{j_k - 1} \frac{\chi_{E_j}}{j} \ \forall k \Rightarrow f(x) \geq \sum_j^{+\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j} = g(x)$

É $f(x) \leq g(x)$. Infatti, $g(x) < +\infty \Rightarrow \ \exists j_k \to +\infty : x \notin E_{j_k} \Rightarrow f(x) \leq \sum_{j=1}^{j_k - 1} \frac{\chi_{E_j}}{j} + \frac{1}{j_k} \leq g(x) + \frac{1}{j_k} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

Teorema di Lusin. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile e di misura finita, f misurabile. Allora

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists K_\epsilon \subset A \text{ compatto } : L^N(A \setminus K_\epsilon) < \epsilon \text{ e } \ f_{|K_\epsilon} \text{ é continua}$$

Dimostrazione. Dato $j \in \mathbf{N}$, siano I_{ij} intervalli disgiunti di lunghezza $\frac{1}{j}$ tali che $\cup_i I_{ij} = \mathbf{R}$. É $A = \cup_i A_{ij}, \ A_{ij} := A \cap f^{-1}(I_{ij}) \ \ (A_{ij} \cap A_{lj} = \emptyset$ se $i \neq l!)$.
Siano $K_{ij}^\epsilon \subset A_{ij}$ compatti tali che $L^N(A_{ij} \setminus K_{ij}^\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2^{i+j+2}} \ \ (K_{ij}^\epsilon \cap K_{lj}^\epsilon = \emptyset$ se $i \neq l!)$.
Siano $\ g_j \equiv \alpha_{ij} \in I_{ij}$ in K_{ij}^ϵ. Le g_j sono continue su $\cup_{i=1}^n K_{ij}^\epsilon \ \ \forall n$. Poi

$$L^N(A \setminus \cup_{i=1}^n K_{ij}^\epsilon) \to L^N(A \setminus \cup_{i=1}^\infty K_{ij}^\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2^{j+1}} \Rightarrow \exists \ n_j : \ L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2^j}.$$

Posto allora $K^\epsilon := \cap_j \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^\epsilon$, é $|g_j(x) - f(x)| < \frac{1}{j} \ \ \forall x \in K^\epsilon$ e quindi f é continua su K^ϵ. Infine $L^N(A \setminus K) \leq \sum_j L^N(A \setminus \cup_{i=1}^{n_j} K_{ij}^\epsilon) \leq 2\epsilon$.

Definizione 2: Funzioni semplici. Sia μ misura su $(X, \ \Sigma)$; $\phi : X \to [-\infty, +\infty]$ misurabile si dice semplice se $\phi(X)$ é al piú numerabile:

$$\phi \ = \ \sum_t t \chi_{\{\phi = t\}} \ = \ \sum_i t_i \chi_{A_i}, \quad A_i = \{\phi = t_i\} \in \Sigma \text{ disgiunti}, \quad \cup_i A_i = X$$

é rappresentazione "canonica"di ϕ.

Definizione 2: Integrale di una funzione semplice. Sia $\phi \geq 0$ semplice.

$$\int_X \phi \, d\mu := \sum_t t \, \mu(\{\phi = t\}), \quad (0 \times \infty := 0)$$

Nota. Siano $B_j \in \Sigma$, $B_j \cap B_i = \emptyset \ \forall i \neq j$, $\cup_j B_j = X$. Sia $\sum_i t_i \chi_{A_i}$ rappresentazione canonica di ϕ. É

$(i) \sum_i t_i \chi_{A_i} = \sum_{ij} t_{ij} \chi_{A_i \cap B_j}$, $\ t_{ij} := t_i$ se $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, $\ t_{ij} := 0$ se $A_i \cap B_j = \emptyset$

$(ii) \int \phi = \sum_{ij} t_{ij} \mu(A_i \cap B_j) \quad (\int \phi := \int_X \phi \, d\mu)$

$(iii) \int \phi = 0$ se e solo se $\mu(\{\phi \neq 0\}) = 0$, cioé se e solo se ϕ é nulla al di fuori di un insieme di misura nulla (diremo ϕ é nulla "quasi ovunque")

Proposizione 3. Siano $\phi, \ \psi \geq 0$ semplici. Allora

$$(i) \ \phi \leq \psi \Rightarrow \int \phi \leq \int \psi$$

$$(ii) \ \int \phi + \psi = \int \phi + \int \psi, \ \int t\phi = t \int \phi, \ \forall t \geq 0$$

Definizione 3: Integrale di una funzione misurabile non negativa. Sia $f \geq 0$ misurabile. Definiamo

$$\int f := \int_X f \, d\mu := \sup_{0 \leq \phi \leq f} \int \phi \quad (\phi \text{ semplice})$$

Nota. Per $f = \phi$ semplice, le Definizioni 2 e 3 coincidono. Dalla definizione segue anche subito che

Proposizione 4. Siano $f \leq g$ misurabili e non negative. Allora $\int f \leq \int g$

Nota. $\int f = 0$ se e solo se $f = 0$ quasi ovunque: ovvio se $f = 0$ q.o.; viceversa, $\int f = 0$, $\phi \leq f \Rightarrow \int \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$ quasi ovunque. Dalla Proposizione 2: $\exists \phi_j \leq f$, $\phi_j \to f$ e quindi $f = 0$ quasi ovunque.

Teorema di Beppo Levi (o della convergenza monotona)

Siano f_n funzioni misurabili, tali che $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\ \forall n \in \mathbf{N}$, $\ \forall x$. Allora

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n = \int \lim_{n \to +\infty} f_n$$

Dimostrazione. Basta provare che $\lim \int f_n \geq \int f$, ovvero

$$0 \leq \phi \leq f \ \Rightarrow \int \phi \ \leq \ \lim \int f_n$$

Sia $\phi = \sum_j t_j \chi_{E_j} \leq f$. Se $t_j = +\infty$ per un j, allora, per ogni $M > 0$,

$$E^M_{n,j} := \{x \in E_j : \ f_n(x) \geq M\} \subset E^M_{n+1,j} , \qquad \cup_n E^M_{n,j} = E_j$$

perché $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall x, n$ e $f_n(x) \to +\infty \quad \forall x \in E_j$. Quindi, se $\mu(E_j) > 0$,

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{E^M_{n,j}} \geq M\mu(E^M_{n,j}) \to M\mu(E_j) \quad \Rightarrow \quad \int f_n \to +\infty$$

Possiamo quindi supporre $t_j < +\infty$ per ogni j. Sia $0 < t < 1$. Siccome $\lim_n f_n(x) > t\varphi(x)$ se $\varphi(x) > 0$, posto $A^t_n := \{x : \ f_n(x) \geq t\varphi(x)\}$, si ha che $\cup_n A^t_n = X$ (unione crescente). Quindi

$$\int f_n \ \geq \ \int f_n \chi_{A^t_n} \ \geq \ t \int \varphi \chi_{A^t_n} = t \sum_{j=1}^{k} t_j \mu(A^t_n \cap E_j) \to t \sum_{j=1}^{k} t_j \mu(E_j) = t \int \varphi$$

Data l'arbitrarieta' di t, concludiamo che $\int \phi \ \leq \ \lim \int f_n$.

Nota. Si puó supporre $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall x \notin Z$, $\mu(Z) = 0$. Basterá sostituire alle f_n le $f_n \chi_Z$.

Corollario. Siano f, g, f_j funzioni misurabili non negative, $t \geq 0$. Allora

$$(i) \quad \int f + g = \int f + \int g, \quad \int tf = t \int f \quad \forall t \geq 0$$

$$(ii) \quad \int \sum_1^\infty f_j \ = \ \sum_1^\infty \int f_j$$

(i) Dalla Proposizione 2: $\exists \varphi_j \leq f, \quad \psi_j \leq g$ successioni crescenti di funzioni semplici non negative tali che $\varphi_j \to f, \quad \psi_j \to g$. Da Beppo Levi, segue che

$$\int f + g = \lim_j \int \varphi_j + \psi_j = \lim(\int \varphi_j + \int \psi_j) = \int f + \int g$$

(ii) $\sum_1^n f_j \to \sum_1^\infty f_j$ in modo crescente implica

$$\sum_1^\infty \int f_j = \lim_n \sum_1^n \int f_j = \lim_n \int \sum_1^n f_j = \int \lim_n \sum_1^n f_j = \int \sum_1^\infty f_j$$

AM5: Esercizi e problemi-II Settimana

Funzioni misurabili e sommabilità

Esercizio 1. Provare che f misurabile $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \Sigma \ \ \forall B \subset \mathbf{R}$ Boreliano.

Suggerimento. Osservare che la preimmagine di un aperto é misurabile (ogni aperto in $\mathbf{R}$ *é unione numerabile di intervalli aperti). Provare quindi che* $\{A \subset \mathbf{R} : f^{-1}(A) \in \Sigma\}$ *é sigma algebra.*

Esercizio 2. Sia f_n una successione di funzioni misurabili. Provare che l'insieme $\{x : \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}$ è misurabile.

Esercizio 3. Sia $f \geq 0$ misurabile in (X, Σ, μ). Provare che

$$\int_X f \, d\mu \ = \ \int_0^\infty \mu(\{f > t\}) \, dt$$

(l'integrale a secondo membro è un integrale di Riemann..)

Suggerimento. Considerare dapprima le funzioni semplici..

Esercizio 4. Sia μ misura su X, f sommabile. Provare che

$$f(x) \in \bar{M} \ \ q.o.x, \quad \text{ove} \ \ M := \{\frac{\int_A f}{\mu(A)} \ : \ 0 < \mu(A) < \infty\}$$

Suggerimento Provare che $B_r(a) \cap \bar{M} = \emptyset \Rightarrow \mu(f^{-1}(B_r(a))) = 0...$

Funzioni misurabili, sommabili secondo Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.

In alcuni degli esecizi seguenti é conveniente usare

Insieme di Cantor, funzione di Cantor

Dato un intervallo chiuso $I = [a, b]$, l'intervallo aperto $J := (a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3})$ é "intervallo centrale", $I_1 = [a, a + \frac{b-a}{3}]$, $I_2 = [b - \frac{b-a}{3}, b]$ sono i "restanti". Iterando, a partire da $I_0 = [0, 1]$ l'operazione di "selezione" dell'intervallo centrale, si perviene alla decomposizione

$$[0, 1] = O \cup C, \quad O = \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^{n-1}} J_{nj}, \quad C = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{2^n} I_{nj}$$

ove J_{nj}, I_{nj} sono intervalli aperti (risp. chiusi) di lunghezza $\frac{1}{3^n}$, per cui $L^1(O)=1$ e $L^1(C)=0$. L'insieme C é "insieme di Cantor".

La funzione di Cantor, definita come limite uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x)=\int_0^x g_n(t)dt, \quad g_n(t)=(\frac{3}{2})^n\sum_1^{2^n}\chi_{I_{nj}}$$

ha le seguenti proprietá:
f é non decrescente, $f(0)=0, f(1)=1,$ f é costante in ciascun J_{nj} e $f(O)=\{\frac{k}{2^n}: \ k,n\in\mathbf{N}\}$

In particolare, $f(O)$ é numerabile, e quindi $L^1(f(O))=0$, $L^1(f(C))=1$.

Esercizio 5. Sia $g(x)=\frac{x+f(x)}{2}$, $x\in[0,1]$, f funzione di Cantor. Provare che g ha inversa continua e che $L^1(g(C))=\frac{1}{2}$.

Esercizio 6. Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ localmente Lipschtziana. Provare che f trasforma insiemi di misura (di Lebesgue) nulla in insiemi di misura nulla. Mostrare con un esempio che le funzioni continue non hanno, in generale, questa proprietà.

Suggerimento. Usare la funzione di Cantor

Esercizio 7. Provare la falsitá della seguente affermazione

f misurabile $E\subset\mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow f(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Sia f la funzione di Cantor e A sottoinsieme non misurabile di $f(C)$ (che esiste perché $L^1(f(C))>0$), per cui $A=f(\{x\in C: f(x)\in A\})$

Esercizio 8. Provare la falsitá della seguente affermazione

f misurabile $E\subset\mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow f^{-1}(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Sia $f=g^{-1}$, g come nell'esercizio 4 ed $E=g^{-1}(A)$, $A\subset g(C)$ non misurabile.

Esercizio 9. Provare la falsitá della seguente affermazione

$L^1(E) = 0 \Rightarrow E$ é boreliano

Suggerimento. Esibire, come nell'esercizio precedente, E di misura nulla e tale che $(g^{-1})^{-1}(E)$ non é Lebesgue misurabile.

Esercizio 10. Siano f, g Lebesgue misurabili in $\mathbf{R}$. Provare che

$g^{-1}(B)$ é boreliano se B é boreliano $\Rightarrow g \circ f$ é misurabile

e che la implicazione é falsa se g é soltanto misurabile.

Esercizio 11. Provare che ogni funzione monotona di $\mathbf{R}$ in se' é misurabile.

Esercizio 12. Sia H_s la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbf{R}^N$. Posto

$$dim_H(A) \ := \ \inf\{s \geq 0 : \ \ H^s(A) = 0\} \ \ \forall A \subset \mathbf{R}^N$$

provare che $\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ (C:=insieme di Cantor)

Esercizio 13. Calcolare, usando l'esercizio 3, $I_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_{\{||x|| \leq 1\}}$, e $J_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_{\{||x|| \geq 1\}}$, e concludere che $I_p < +\infty$ se e solo se $p < n$, $J_p < +\infty$ se e solo se $p > n$.

Esercizio 14. Sia f Lebesgue sommabile in $\mathbf{R}^N$, $f_h(x) := f(x-h), \ \ h \in \mathbf{R}^N$. Provare che

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_h(x)dx \ = \ \int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx$$

Suggerimento. Provarlo dapprima per le funzioni semplici..

Esercizio 15. Sia f sommabile in $\mathbf{R}$. Provare che la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ converge assolutamente quasi per ogni $x \in \mathbf{R}$ ad una funzione g, periodica di periodo uno, e tale che $g\chi_{[a,b]}$ è sommabile $\forall [a,b]$

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}} f_k \chi_{[0,1]}, \ \ f_k(x) := \ f(x+k)$

Esercizio 16. Provare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4}$ converge quasi per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e diverge in un insieme denso in $[-\pi, \pi]$.

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx$

Esercizio 17. Siano $r_n \in \mathbf{R}$. Provare che $\sum_n \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}} < \infty$ per quasi tutti gli $x \in \mathbf{R}$. Provare quindi che, se $n \to r_n$ é biiezione di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{Q}$, allora $\int_a^b (\sum_n \frac{1}{2^n\sqrt{|x-r_n|}}) = +\infty \ \ \forall a < b$.

Esercizio 18. Sia f misurabile e limitata in $\mathbf{R}^n$. Provare che

(i) $\int_{\mathbf{R}^n} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} L^n(\{x : |f(x)| > \frac{1}{2^n}\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume limitata.

(ii) $\int |f| < +\infty \Rightarrow \sum_n L^n(\{|f| > n\}) < \infty$

É vero il viceversa? Si puó prescindere dall'ipotesi di limitatezza?

Esercizio 19. Sia f misurabile in $\mathbf{R}^n$ e nulla fuori di una palla. Provare che

$\int_{\mathbf{R}^n} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n L^n(\{x : |f(x)| \geq 2^n\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume a supporto compatto.

Esercizio 20. Sia μ misura su X, $E \subset X$ misurabile, $f : X \to \mathbf{R}$ misurabile, $p > 0$. Provare che

(i) $\mu(\{|f| \geq t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int |f|^p$

(ii) $\int |f|^p < \infty \ \Rightarrow \ \mu(\{|f| \geq t\}) = \circ(\frac{1}{t^p})$

Provare con un esempio che $\mu(\{|f| \geq t\}) = \circ(\frac{1}{t^p})$ non implica $\int |f|^p < \infty$.

Suggerimento. Considerare $f(x) = \frac{1}{|x \log x|} \chi_{(0,\frac{1}{e})}$.