AM5: Tracce delle lezioni- XII Settimana

SOLUZIONI DEBOLI DELL'EQUAZIONE DI POISSON

Sia $\quad \Delta = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.\quad$ Se , data f, $\quad u \in C^2(\mathbf{R}^N)$ é soluzione di

$$\text{(equazione di Poisson)} \qquad -\Delta u = f \quad \text{in} \quad \mathbf{R}^N$$

allora, moltiplicando l'equazione per $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ ed integrando per parti, si ha

$$(\star) \qquad \int \nabla u\, \nabla \varphi \;=\; \int f\, \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Viceversa, se $u \in C^2(\mathbf{R}^N)$ ha questa proprietá, allora é certamente soluzione dell'equazione di Poisson.

Piú in generale, diremo che u é soluzione debole dell'equazione di Poisson se $u \in \mathcal{D}^1$ e soddisfa $(\star)$.

TEOREMA. Sia $N \geq 3$.

$$\forall f \in L^{\frac{2N}{N+2}}, \quad \exists\,!\, u \in \mathcal{D}^1 : \quad \int \nabla u\, \nabla \varphi \;=\; \int f\, \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Inoltre la soluzione dipende in modo continuo dal dato:

$$u \in \mathcal{D}^1 : \quad \int \nabla u\, \nabla \varphi \;=\; \int f\, \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \quad \Rightarrow \quad (\int |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}} \leq c \|f\|_{\frac{2N}{N+2}}$$

Infatti, per le diseguaglianze di Holder e di Sobolev

$$|\int f\, v| \leq \|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \ \|v\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}} \;\leq\; \|f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \ \|v\|_{\mathcal{D}^1} \quad \forall v \in \mathcal{D}^1$$

e cioé $\quad v \to \int f\, v \quad$ é un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{D}^1$ e quindi, per il Teorema di rappresentazione di Riesz,

$$\exists u \in \mathcal{D}^1 : \quad \int f\, v \;= < u, v >_{\mathcal{D}^1} = \int \nabla u\, \nabla v \quad \forall v \in \mathcal{D}^1$$

ovvero u é soluzione debole dell'equazione di Poisson con dato f.

Infine, per densitá, in $(\star)$ possiamo prendere $\varphi = u$, e quindi, usando Holder e poi Sobolev,

$$\int |\nabla u|^2 = \int u f \leq \|f\|_{\frac{2N}{N+2}} \|u\|_{\frac{2N}{N-2}} \leq c\, \|f\|_{\frac{2N}{N+2}} (\int |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$$

UNA FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE

Sia $h \in L^{\frac{2N}{N+2}}$ e sia $u \in \mathcal{D}^1$ l'unica soluzione di $(\star)$. Allora

$$u \; = \; \frac{1}{c_N} \; h * G_{N-2}, \qquad\qquad c_N \; = \; N(N-2) \int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$$

Prova. Abbiamo visto che $h * G_{N-2} \in \mathcal{D}^1$ e inoltre $h * G_{N-2} \in C^\infty$ se $h \in C_0^\infty$. Proviamo dapprima che

$$h \in C_0^\infty \quad \Rightarrow \quad -\Delta(h * G_{N-2}) = c_N \, h$$

É

$$\Delta\,(h * G_{N-2})(x) = \int \frac{\Delta h(x-y)}{|y|^{N-2}}\, dy = \lim_{\epsilon\to 0} \int \frac{\Delta h(z)}{(\epsilon^2+|x-z|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\, dz \; =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int h(z)\, \Delta_z \frac{1}{(\epsilon^2+|x-z|^2)^{\frac{N-2}{2}}}\, dz \; =$$

$$= \; \lim_{\epsilon\to 0} \int h(z) \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} [(N-2) \frac{x_j - z_j}{(\epsilon^2+|x-z|^2)^{\frac{N}{2}}} \;]\, dz \; =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int h(z) \; \sum_{j=1}^N [N(N-2) \frac{(x_j-z_j)^2}{(\epsilon^2+|x-z|^2)^{\frac{N+2}{2}}} \; - (N-2) \frac{1}{(\epsilon^2+|x-z|^2)^{\frac{N}{2}}} \;]\, dz \; =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int h(z) \; \frac{-N(N-2)\epsilon^2}{(\epsilon^2+|x-z|^2)^{\frac{N+2}{2}}}\, dz \; = \; \lim_{\epsilon\to 0} \int h(x+\epsilon\xi) \; \frac{-N(N-2)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+2}{2}}}\, d\xi \; =$$

$$= \; -h(x) N(N-2) \int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$$

Se poi $h_n \in C_0^\infty$, $h_n \to h$ in $L^{\frac{2N}{N+2}}$ é anche

$$\| \frac{\partial}{\partial x_j} (h_n - h) * G_{N-2} \|_2 \le (N-2) \int \frac{|h_n(y) - h(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy \; \le \; c \|h_n - h\|_{\frac{2N}{N+2}} \to_n 0$$

Concludiamo quindi che

$$\int \nabla(h * G_{N-2})\, \nabla\varphi \; = \; \lim_n \int \nabla(h_n * G_{N-2})\, \nabla\varphi \; =$$

$$= \; \lim_n \int \; c_N\, h_n\, \varphi \; = \; c_N \int h\, \varphi \qquad\qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Dalla formula di rappresentazione ed (HLS) si ottengono informazioni (non ottimali !) sulla regolaritá della soluzione.

Regolaritá.

Sia $N \geq 3$. Sia $h \in L^p \cap L^{\frac{2N}{N+2}}$, $p \geq \frac{2N}{N+2}$. Sia $u = \frac{1}{c_N}\, h * G_{N-2}$ l'unica soluzione di $(\star)$ in $\mathcal{D}^1$. Allora

(i) $p < \frac{N}{2} \;\Rightarrow\; u \in L^q \quad \forall q \in [\frac{2N}{N+2}, \frac{Np}{N-2p}]$, $\quad p = \frac{N}{2} \;\Rightarrow\; u \in L^q \quad \forall q$

(ii) $\frac{N}{2} < p \;\Rightarrow\; u$ ha derivate prime Holderiane di esponente $\alpha < 2 - \frac{N}{p}$

(iii) Se h é Holderiana di esponente α, allora u é di classe C^2 e le sue derivate seconde sono holderiane.

Prova. (i) $\|h * G_{N-2}\|_{\frac{Np}{N-2p}} \leq c(N,p)\|h\|_p$

(ii) $|\frac{\partial}{\partial x_j}(h * G_{N-2})| \leq (N-2)\int \frac{|h(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy \;\Rightarrow\; \|\frac{\partial}{\partial x_j}(h * G_{N-2})\|_{\frac{Np}{N-p}} \leq \|h\|_p$. Siccome $N > p > \frac{N}{2} \;\Rightarrow\; \frac{Np}{N-p} > N$, l'Holderianitá di $\frac{\partial}{\partial x_j}(h * G_{N-2})$ segue dal Teorema di Morrey.

(iii) Omessa

IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE DI LAPLACE

Sia Ω aperto limitato in $\mathbf{R}^N$. Una $u \in C^2(\Omega)$ si dice **armonica** in Ω se

$$\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Mediante integrazione per parti, si vede che u deve soddisfare

$$(\star\star) \qquad \int_\Omega \nabla u\, \nabla\varphi \;=\; -\int_\Omega u\, \Delta\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Una $u \in L^1_{loc}$ (rispettivamente dotata di derivate deboli) che soddisfi $(\star\star)$ si dice **debolmente armonica** in Ω

Data $\quad g \in C(\mathbf{R}^N)$, $\quad$ se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, armonica in Ω, coincide con g sulla frontiera di Ω , u si chiama **prolungamento armonico** in Ω del dato al bordo g.

Definizione di $H_0^1(\Omega)$. $\quad u \in H_0^1(\Omega)$ se

$$\exists \varphi_n \in C_0^\infty(\Omega): \quad \varphi_n \to_n u \quad \text{in} \quad L^2 \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla(\varphi_n - \varphi_m)|^2 \to_{n,m\to+\infty} 0$$

Posto $\overline{u} := u$ in Ω e $\overline{u} := 0$ fuori di Ω, risulta $\overline{u} \in H^1(\mathbf{R}^N)$ e $\nabla\overline{u} = 0$ fuori di Ω. Scriveremo, per semplicitá, $\nabla u := \nabla\overline{u}$. Grazie alla diseguaglianza di Poincaré,

$$\|u\| := \quad (\int |\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}$$

é una norma Hilbertiana su $H_0^1(\Omega)$ ($\|u\| = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$). $\quad$ In particolare,

Proposizione.

$$(i) \quad u_n \in H_0^1(\Omega), \quad \sup_n \int |\nabla u_n|^2 < +\infty \;\Rightarrow$$
$$\exists n_k, \quad \exists u \in H_0^1(\Omega): \quad \int \nabla u_{n_k} \nabla v \to \int \nabla u \, \nabla v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$(ii) \quad u_n \rightharpoonup u \;\Rightarrow\; \liminf \int |\nabla u_n|^2 \geq \int |\nabla u|^2$$

Definizione. $\quad w$ é **prolungamento armonico in senso debole** di g in Ω se

$$\exists u \in H_0^1(\Omega): \quad w = u + g \quad \text{e} \quad \int_\Omega \nabla w \, \nabla\varphi \;=\; 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Grazie alle proprietá (i)-(ii), si ha

$$\exists \; u_g \in H_0^1(\Omega): \quad \int |\nabla(u_g + g)|^2 \leq \int |\nabla(v + g)|^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Segue subito che

$$\int_\Omega (u_g + g)\,\varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Dunque $w := u_g + g$ é prolungamento armonico (debole) di g.

IL TEOREMA DI DIFFERENZIAZIONE DI LEBESGUE-BESICOVITCH

Sia $\quad f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N)$. $\quad$ Allora

$$\frac{1}{vol(B_r)} \int_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \ \to_{r\to 0} 0 \qquad q.o.\ x$$

In particolare, $\quad \frac{1}{vol(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy \ \to_{r\to 0} f(x) \qquad q.o.\ x$

NOTA. Se f é continua, la conclusione é vera per ogni x, e ció segue in tal caso subito dal teorema della media: fissato comunque x,

$$\forall r, \quad \exists \xi(r) \in B_r(x): \quad \frac{1}{vol(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy \ = \ f(\xi(r)) \to_{r\to 0} \ f(x)$$

Corollario 1. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Allora

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt \ = \ f(x) \ \ q.o.\ x$$

Prova. Sia $r > 0$. Applicando L-B, otteniamo quasi per ogni x,

$$|\frac{1}{r} \int_x^{x+r} f(t)\, dt - f(x)| = |\frac{1}{r} \int_x^{x+r} f(t)\, dt - \frac{1}{r} \int_x^{x+r} f(x)\, dt| \leq \frac{2}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x)|\, dt \to_{r\to 0}$$

$$|-\frac{1}{r} \int_x^{x-r} f(t)dt - f(x)| = |\frac{1}{r} \int_{x-r}^{x} f(t)dt - \frac{1}{r} \int_{x-r}^{x} f(x)dt| \leq \frac{2}{2r}| \int_{x-r}^{x+r} |f(t) - f(x)|dt \to_{r\to 0}$$

NOTA. Se consideriamo la **'funzione integrale'**

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \qquad f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$$

il Corollario 1 dice che F é derivabile per quasi ogni x e si puó scrivere

$$(T - N) \qquad\qquad F(y) - F(x) = \int_x^y F'(t)dt$$

Tale formula é tuttavia falsa per una funzione F che non sia necessariamente del tipo 'funzione integrale' ma si supponga, semplicemente, derivabile quasi ovunque con derivata sommabile.

Ad esempio, la funzione di Cantor f, essendo localmente costante fuori dell'insieme di Cantor, é derivabile fuori di esso con derivata nulla, ma non é l'integrale della sua derivata: $f(x) \neq \int_0^x f' \equiv 0!$.

La validitá di (T-N) é infatti una proprietá caratteristica delle **funzioni f assolutamente continue**

$$\forall \epsilon, \exists \delta_\epsilon : \sum_{finita} |b_j - a_j| \leq \delta_\epsilon \;\; \Rightarrow \;\; \sum_j |f(b_j) - f(a_j)| \leq \epsilon$$

tutte le volte che gli intervalli (a_j, b_j) sono disgiunti. Notiamo che ogni 'funzione integrale' é assolutamente continua (é questa conseguenza dell'assoluta continuitá dell'integrale come funzione di insieme).

L'idea é che ogni funzione assolutamente continua f si puó scrivere nella forma di 'funzione integrale' .

Corollario 2. Sia μ misura boreliana finita in $\mathbf{R}^N$, assolutamente continua rispetto alla misura di lebesgue L^N. Allora

$$\frac{d\mu}{dL^N}(x) := \lim_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)}$$

esiste L^N-quasi ovunque, é sommabile e

$$\mu(E) \; = \; \int_E \frac{d\mu}{dL^N} \, dL^N$$

Infatti, per Radon-Nikodym, esiste $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ tale che $\mu(E) \; = \; \int_E f \, dL^N$ e, per Lebesgue-Besicovitch, $\frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)} = \frac{\int_E f}{vol(B_r)} \to_r f \quad L^N - q.o.$

La dimostrazione di L-B si basa sul

Lemma. Data $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, sia $f^\sharp(x) \; := \; \limsup_{r \to 0} \left[\frac{1}{volB_r} \int\limits_{B_r(x)} |f| \right]$

Allora $$\int\limits_{\{f^\sharp \geq c\}} |f| \;\; \geq \;\; c \;\; L^N(\{f^\sharp \geq c\})$$

NOTA. Se f é continua, allora $f^\sharp \; \equiv \; |f|$ e la diseguaglianza del Lemma é infatti la diseguaglianza di Chebichev.

Dimostrazione L-B. Possiamo supporre, eventualmente sostituendo f con $f\,\chi_{B_R}$ R grande, che sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Posto

$$L(x) := \limsup_{r\to 0}\left[\frac{1}{volB_r}\int_{B_r(x)} |f(x)-f(y)|\,dy\right]$$

si tratta di provare che

$$L^N(\{x : \quad L(x) \ \geq\ \alpha\}) \ =\ 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Fissata $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, si ha

$$L(x) \leq \limsup_{r\to 0}\left[\frac{1}{volB_r}\int_{B_r(x)} (|f(x)-\varphi(y)| + |\varphi(y)-f(y)|)\ dy\right] \ \leq$$

$$\leq |f(x)-\varphi(x)| + \limsup_{r\to 0}\left[\frac{1}{volB_r}\int_{B_r(x)} |\varphi(y)-f(y)|\,dy\right] = |f(x)-\varphi(x)| + (f-\varphi)^\sharp(x)$$

Fissato $\alpha > 0$ si ha quindi

$$\{x : \quad L(x) \ \geq\ \alpha\} \subset \{x : \quad |f(x)-\varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} \ \cup\ \{x : \quad (f-\varphi)^\sharp(x) \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

e quindi $\qquad L^N(\{x : \quad L(x) \ \geq\ \alpha\}) \ \leq$

$$\leq\ L^N(\{x : \quad |f(x)-\varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) + L^N(\{x : \quad (f-\varphi)^\sharp(x) \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\leq \frac{2}{\alpha}\int_{|f-\varphi|\geq\frac{\alpha}{2}} |f-\varphi| \ +\ L^N(\{x : \quad (f-\varphi)^\sharp(x) \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

Dal Lemma, applicato a $f-\varphi$, otteniamo

$$\int_{\{(f-\varphi)^\sharp\ \geq\ \frac{\alpha}{2}\}} |f-\varphi| \quad\geq\quad \frac{\alpha}{2}\ \ L^N(\{(f-\varphi)^\sharp \geq \frac{\alpha}{2}\})$$

Segue allora che $\qquad L^N(\{x : \quad L(x) \geq \alpha\}) \leq \dfrac{4}{\alpha}\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} |f-\varphi|$

e quindi $\qquad L^N(\{x : \quad L(x) \ \geq\ \alpha\}) \ \leq\ \dfrac{4}{\alpha}\ \inf\left\{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} |f-\varphi| \ : \quad \varphi \in C_0^\infty\right\} = 0$