AM5: Tracce delle lezioni- VII Settimana

LO SPAZIO L^∞: DUALITÁ E COMPATTEZZA DEBOLE

Sia μ misura su X. $\quad L^\infty = L^\infty(X,\mu) :=$

$$\{f| \quad f \quad \text{é misurabile ed esiste} \quad c>0: \quad |f(x)| \le c \quad \text{quasi per ogni} \quad x\}$$

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \ge 0: \quad |f(x)| \le c \quad \text{quasi per ogni} \quad x\}$$

É facile vedere che $\quad (L^\infty, \|.\|_\infty)$ **é un Banach.**

Teorema della Media. Sia $f \in L^1$. Allora

$$|\frac{1}{\mu(E)}\int_E g| \le c \quad \forall E \quad \text{misurabile e t.c.} \quad 0<\mu(E)<+\infty \quad \Rightarrow \quad \|g\|_\infty \le c$$

Prova. $\quad \int |g| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x : g(x) \ge c + \frac{1}{n}\}) < \infty \quad$ e quindi

$$\mu(\{x : g(x) \ge c + \frac{1}{n}\}) = 0 \quad \text{perché} \quad 0 < \mu(\{x : g(x) \ge c + \frac{1}{n}\}) < \infty \quad \Rightarrow$$

$$c \ge \frac{1}{\mu(\{x : g(x) \ge c + \frac{1}{n}\})}\int_{\{x : g(x) \ge c + \frac{1}{n}\}} g \ge c + \frac{1}{n}$$

Dunque

$$\mu(\{x : g(x) > c\}) = \mu(\cup_n\{x : g(x) \ge c + \frac{1}{n}\}) = \sup_n \mu(\{x : g(x) \ge c + \frac{1}{n}\}) = 0$$

Analogamente $\mu(\{x : g(x) < -c\}) = 0$ e quindi $|g(x)| \le c$ quasi per ogni x, ovvero $\|g\|_\infty \le c$.

Il duale di L^1 é L^∞. Se μ é σ-finita, allora

$$(L^1)' \quad \text{é isometricamente isomorfo a} \quad L^\infty$$

Prova. $\quad$ Data $\quad g \in L^\infty$, $\quad$ sia

$$T(g) := l_g, \qquad l_g(f) = \int fg \quad \forall f \in L^1. \qquad \text{É} \quad |l_g(f)| = |\int fg| \le \|f\|_1\|g\|_\infty$$

Dunque $\quad l_g \quad$ é un funzionale lineare e continuo su L^1 con

$$\|l_g\| \leq \|g\|_\infty$$

Proviamo che $\|l_g\| \geq \|g\|_\infty$, e quindi T é isometria (chiaramente lineare). Intanto,

$$|\int fg| = |l_g(f)| \leq \|l_g\|\|f\|_1 \quad \forall f \in L^1 \quad \Rightarrow \quad |\int_E g| \leq \|l_g\|\mu(E)$$

per ogni E misurabile di misura finita. Se $\mu(X) < +\infty$ e quindi $g \in L^1$, dal teorema della media segue che

$$\|g\|_\infty \leq \|l_g\|$$

Sia $\quad X = \cup_j E_j, \quad E_j \subset E_{j+1}, \quad \mu(E_j) < +\infty$ e sia

$$l_j(f) := \int f g_j, \quad g_j := g\chi_{E_j}, \quad f \in L^1$$

e quindi $\quad \|g_j\|_\infty \leq \|l_j\|$. Ma

$$|l_j(f)| = |\int (f\chi_{E_j})g| \leq \|l_g\|\|f\chi_{E_j}\|_1 \leq \|l_g\|\|f\|_1 \quad \Rightarrow \quad \|l_j\| \leq \|l_g\| \quad \Rightarrow$$

$$\|g_j\|_\infty \leq \|l_g\| \quad \Rightarrow \quad |g(x)| \leq \sup_j |g_j(x)| \leq \|l_g\| \quad \Rightarrow \quad \|g\|_\infty \leq \|l_g\|$$

Resta da provare che T é suriettiva. Supponiamo dapprima che $\mu(X) < +\infty$. Sia $l \in (L^1)'$:

$$|l(f)| \leq \|l\|\|f\|_1 \leq \|l\|\sqrt{\mu(X)}\|f\|_2 \quad \forall f \in L^2$$

Dunque l é lineare e continuo su L^2 e quindi

$$\exists g \in L^2 : l(f) = \int fg \quad \forall f \in L^2$$

$$\text{Ma} \qquad |\int g\chi_E| = |l(\chi_E)| \leq \|l\|\mu(E) \quad \Rightarrow \quad \|g\|_\infty \leq \|l\|$$

Dunque $\quad l(f) = l_g(f) \quad \forall f \in L^2$ e quindi, essendo L^2 denso in L^1, $\quad l(f) = l_g(f) \quad \forall f \in L^1$.

Se $\quad X = \cup_j E_j, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \mu(E_j) < +\infty$, si ha

$$f \in L^1 \quad \Rightarrow \quad f = \sum_j f\chi_{E_j} \quad \Rightarrow$$

$$l(f) = \sum_j l(f\chi_{E_j}) = \sum \int f\chi_{E_j} g_j = \int f(\sum_j \chi_{E_j} g_j) = \int fg$$

con $\|g_j\| \leq \|l\|$ e quindi $\|g\|_\infty = \|\sum_j \chi_{E_j} g_j\|_\infty \leq \|l\|$.

Convergenza debole* in L^∞ e compattezza debole*. Siano $f_n \in L^\infty$.

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad \Leftrightarrow \quad \int (f_n - f)h \to 0 \quad \forall h \in L^1$$

Se L^1 é separabile, allora

$$M := \sup_n \|f_n\|_\infty < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists n_k, \quad f \in L^\infty : f_{n_k} \rightharpoonup^* f$$

Infatti, siccome $h \in L^1 \Rightarrow \sup_n |\int f_n h| \le M\|h\|_1$ il procedimento diagonale di Cantor porta a costruire una f_{n_k} tale che $l(h) := \lim_k \int f_{n_k} h$ esiste finito per gli h in un sottospazio lineare denso di L^1, su cui l é infatti lineare e continuo. Il suo prolungamento continuo a tutto L^1 si rappresenta mediante una funzione $g \in L^\infty$:

$$\lim_k \int f_{n_k} h = l(h) = \int gh$$

per tutte le h in un insieme denso in L^1 e quindi su tutto L^1.

Il duale di L^∞ non é L^1. Ogni elemento $g \in L^1$ induce un funzionale lineare continuo l_g su L^∞ : $l_g(f) := \int fg$, $f \in L^\infty$. É $\|l_g\| \le \|g\|_1$ ed anche, presa $f = sign\ g$, $\|l_g\| \ge \int |g|$. Dunque $T(g) := l_g$ é **isometria lineare** di L^1 in $(L^\infty)'$. In questo caso peró T **non** é **suriettiva**: non tutti i funzionali lineari e continui su L^∞ si possono rappresentare mediante funzioni L^1, ovvero L^1 non é il duale di L^∞. Diamo **un esempio**.

Sia $l(\varphi) := \varphi(0)$ $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, funzionale lineare continuo su C_0^∞. Per il Teorema di Hahn-Banach l si prolunga a tutto L^∞. Supponiamo sia $l(f) = \int gf$, $f \in L^\infty$ per qualche $g \in L^1$. Sia $\varphi \in C_0^\infty : \varphi_n(x) := \varphi(nx) \to 0 \quad \forall x \ne 0$. Allora $\varphi(0) = l(\varphi_n) = \int g\varphi_n \to_n 0$ che é assurdo se $\varphi(0) \ne 0$.

Convergenza debole in L^1. Siano $f_n \in L^1$.

$$f_n \rightharpoonup f \quad \Leftrightarrow \quad \int (f_n - f)h \to 0 \quad \forall h \in L^\infty$$

Succesioni limitate in L^1 non hanno, in generale, estratte debolmente convergenti. Sia $0 \le f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $\int f = 1$, $f_n(x) := n^N f(nx)$. É $\int |f_n| = \int |f|$. Supponiamo

$$\exists n_k, \quad \hat{f} \in L^1 : \quad \int f_{n_k} h \to \int \hat{f} h \quad \forall h \in L^\infty$$

Ma $h \in C_0^\infty \Rightarrow \int f_{n_k} h = \int f(y) h(\frac{y}{n}) dy \to h(0)$. Dunque sarebbe $\int \hat{f} h = h(0) \quad \forall h \in C_0^\infty$ che, come visto sopra, non é possibile.

Funzionali lineari continui e misure. Se $0 \le g \in L^1$. Il funzionale associato

$$l_g(f) = \int fg, f \in L^\infty$$

ha le seguenti proprietá:

$$(i)\ \ f \ge 0 \quad \Rightarrow \quad l_g(f) \ge 0, \quad (ii)\ \ f_n \rightharpoonup^* 0 \quad \Rightarrow \quad l_g(f_n) \to 0$$

$$\nu_g(E) := l_g(\chi_E) = \int_E g, \quad E \in \Sigma_\mu$$

é misura (di densitá g). Ma c'é un modo piú generale di generare funzionali lineari e continui su L^∞. Se ν é misura finita su Σ_μ,

$$l_\nu(f) := \int f\chi_{\{|f| \le \|f\|_\infty\}} d\nu$$

é lineare e continuo su $L^\infty(\mu)$, perché $|l_\nu(f)| \le \|f\|_\infty \nu(X)$. Un l_ν, e a maggior un $l \in (L^\infty)'$ non sará in generale un l_g. Se peró $l \in (L^\infty)'$ ha le proprietá di un l_g:

$$(i)\ \ f \ge 0 \quad \Rightarrow \quad l(f) \ge 0, \quad (ii)\ \ f_n \rightharpoonup^* 0 \quad \Rightarrow \quad l(f_n) \to 0$$

proviamo che $\exists g \in L^1 : \ l = l_g$: caratterizziamo cioé il sottospazio di $(L^\infty)'$ isometricamente isomorfo a L^1. Notiamo che l genera una misura ν_l cosí definita

$$\nu_l(E) := l(\chi_E), \quad E \in \Sigma_\mu$$

Infatti , se E_j sono misurabili disgiunti, allora $\nu(\cup_{j=1}^\infty E_j) =$

$$l(\chi_{\cup_{j=1}^n E_j}) + l(\chi_{\cup_{j \ge n+1} E_j}) = \sum_{j=1}^n l(\chi_{E_j}) + l(\chi_{\cup_{j \ge n+1} E_j}) = \sum_{j=1}^n \nu(E_j) + \circ(1) \to_n \sum_{j=1}^\infty \nu(E_j)$$

perché $\int h\chi_{\cup_{j=1}^\infty E_j} = \sum_j \int h\chi_{E_j}$

$$\Rightarrow \quad \int h\chi_{\cup_{j \ge n+1} E_j} = \sum_{j \ge n+1} \int h\chi_{E_j} \to_n 0 \quad \forall h \in L^1 \quad \Rightarrow \quad l(\chi_{\cup_{j \ge n+1} E_j}) \to_n 0$$

A sua volta ν_l genera l :

$$l(f) = \int f d\nu_l \quad \forall f \in L^\infty(\mu)$$

Notiamo che, per come é definita, ν_l ha una proprietá che una generica ν (ad esempio la delta in $\mathbf{R}^N$) non ha:

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(E) = l(\chi_E) = l(0) = 0$$

Misure assolutamente continue. Siano μ, ν misure su Σ.

$\nu \prec\prec \mu$ (ν é assolutamente continua rispetto a μ) se $\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$.

IL TEOREMA DI RADON-NIKODYM

Sia Σ sigma algebra di sottoinsiemi di X; siano $\nu, \mu :\to [0, +\infty]$ misure, rispettivamente finita, *sigma*- finita. Allora $\exists \hat{h} \in L^1(X, \mu)$, $\exists Z \in \Sigma$ con $\nu(Z) = 0$ tali che

$$\nu(E) = \int_E f d\mu + \nu(E \cap Z) \quad \forall E \in \Sigma$$

Prova. Supponiamo dapprima $\mu(X) < +\infty$. Sia

$$\lambda(E) = \mu(E) + \nu(E), \quad E \in \Sigma$$

per cui $\lambda(E) \geq \mu(E), \quad \lambda(E) \geq \nu(E) \quad \forall E \in \Sigma, \qquad \lambda(X) < +\infty$

e quindi, per ogni φ semplice e non negativa,

$$\int \varphi \, d\lambda \geq \int \varphi \, d\mu, \qquad \int \varphi \, d\lambda \geq \int \varphi \, d\nu$$

e quindi, per ogni f Σ-misurabile

$$\int |f| \, d\lambda = \int |f| \, d\mu + \int |f| \, d\nu \qquad \int |f| \, d\lambda \geq \int |f| \, d\mu, \qquad \int |f| \, d\lambda \geq \int |f| \, d\nu$$

In particolare, $L^1(\lambda) \subset L^1(\nu)$ e $f \to \int f \, d\nu$ é continuo in $L^1(\lambda)$ e quindi

$$(*) \qquad \exists h \in L^\infty(\lambda) : \quad \int f \, d\nu = \int f \, h \, d\lambda \quad \forall f \in L^1(\lambda)$$

Inoltre, $\lambda(E) > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{\lambda(E)} \int_E h \, d\lambda = \frac{1}{\lambda(E)} \int \chi_E \, d\nu = \frac{\nu(E)}{\lambda(E)} \leq 1$

$$\Rightarrow \qquad 0 \leq h \leq 1 \quad \lambda - q.o.$$

Iteriamo ora $(*)$:

$$(**) \qquad \int f \, d\nu = \int f \, h \, d\lambda = \int fh \, d\mu + \int f \, h^2 \, d\lambda = \int fh \, d\mu + \int f \, h^2 \, d\mu + \int f \, h^2 \, d\nu$$

$$= \ldots\ldots = \int f \, (h + h^2 + \ldots + h^n) \, d\mu + \int f h^n \, d\nu \quad \forall f \in L^1(\lambda)$$

In particolare, posto $f \equiv 1$ in $(**)$, vediamo che

$$\nu(X) \geq \int \left(\sum_n h^n \right) d\mu \quad \text{e quindi} \quad \sum_n h^n(x) < +\infty \quad \mu - q.o. \quad \mu(\{h = 1\}) = 0$$

Posto $\qquad \hat{h} := \sum_n h^n \in L^1(\mu) \qquad Z := \{h = 1\}$

e passando al limite in $(**)$ otteniamo

$$\int f\,d\nu = \int f\,\hat{h}\,d\mu + \int_{\{h=1\}} f\,d\nu \quad \forall f \in L^1(\lambda), \quad \nu(E) = \int_E \hat{h}\,d\mu + \nu(E\cap Z) \quad \forall E \in \Sigma$$

Sia infine $\quad X = \cup_j E_j, \quad E_j \in \Sigma, \quad \mu(E_j) < +\infty, \quad E_j$ due a due disgiunti. Per quanto visto, ove $X = E_j$,

$$\exists \hat{h}_j = \hat{h}_j \chi_{E_j} \in L^1(\lambda), \quad Z_j \in \Sigma, \quad \mu(Z_j) = 0 \qquad \text{tali che}$$

$$\nu(E \cap E_j) = \int_E \hat{h}_j\,d\mu + \nu(E \cap Z_j) \quad \forall E \in \Sigma \qquad \text{e quindi}$$

$$\nu(E) = \nu(\cup_j (E \cap E_j)) = \sum_j \nu(E \cap E_j) = \int_E \hat{h}\,d\mu + \nu(E \cap (\cup_j Z_j)), \quad \hat{h} := \sum_j \hat{h}_j$$

Corollario. Sia $l \in (L^\infty)'$ tale che $\; f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad l(f) \geq 0, \quad .\quad$ Allora

$$\exists g \in L^1, g \geq 0 : \quad l(f) = l_g(f) := \int fg \quad \forall f \in L^\infty \;\Leftrightarrow\; (f_n \rightharpoonup^* 0 \;\Rightarrow\; l(f_n) \to 0)$$

Come osservato, l_g ha tale proprietá, e se l ha questa proprietá allora

$$l(f) = \int f\,d\nu_l, \quad \forall f \in L^\infty_\mu, \quad \nu_l(E) := l(\chi_E) \quad \forall E \in \Sigma_\mu$$

Infine, $\quad \nu \prec\prec \mu \;\Rightarrow\; \quad \exists g \in L^1_\mu : \quad \int f\,d\nu_l = \int fg d\mu.$

Misure singolari e Teorema di decomposizione di Lebesgue.

Siano $\; \mu, \nu \;$ misure (σ-finita, finita) definite sulla σ-algebra $\Sigma \subset \mathcal{P}\,(X)$:

$$\nu \text{ é singolare rispetto a } \mu \; (\nu \perp \mu) \;\Leftrightarrow\; \exists Z \in \Sigma : \mu(Z) = 0, \nu(Z^c) = 0$$

É vero che : $\quad \exists\; \nu_{ac} \prec\prec \mu,\; \nu_s \perp \mu\;$ unicamente determinate : $\quad \nu = \nu_{ac} + \nu_s$

Che tale decomposizione esista segue dal Teorema di Radon-Nikodym:

$$\exists h \in L^1_\mu, \quad Z \in \Sigma, \quad \mu(Z) = 0 : \quad \nu(E) = \int_E h d\mu + \nu(Z \cap E) = \nu_{ac}(E) + \nu_s(E)$$

$$\nu_{ac}(E) := \int_E h d\mu, \qquad \nu_s(E) := \nu(Z \cap E)$$

L'unicitá é poi facile da verificare.