# AM5: Tracce delle lezioni- IV Settimana

## MISURA PRODOTTO E TEOREMA DI FUBINI

Siano $\mu, \nu$ misure su $X, Y$, $\Sigma_\mu$, $\Sigma_\nu$ le classi dei misurabili. Per ogni $S \subset X \times Y$ é

$$(\mu \times \nu)(S) := \inf\{\sum_j \mu(A_j)\nu(A_j) : \ S \subset \cup_j R_j, \ R_j := \ A_j \times B_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu\}$$

$\to !$ $\quad L^{n+m}(\mathbf{R}^{n+m}) \ = \ L^n(\mathbf{R}^n) \times L^m(\mathbf{R}^m)$

**Proposizione 1**. $\mu \times \nu$ é misura (esterna) su $X \times Y$.

Dato $S$ in $X \times Y$, le **sezioni** di $S$ sono

$$S_x := \{y : \ (x, y) \in S\}, \quad \forall x \in X, \qquad\qquad S^y := \{x : \ (x, y) \in S\} \quad \forall y \in Y$$

É $\quad (\cup_j S_j)_x = \cup_j (S_j)_x, \qquad\qquad (\cap_j S_j)_x = \cap_j (S_j)_x.$

Indicato $\quad R \ = \ A \times B \ \in \ \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu \quad$ un **rettangolo misurabile**, valgono le basilari relazioni

$$\nu(R_x) = \nu(B)\chi_A, \qquad\qquad \mu(A)\nu(B) \ = \ \int_X \nu(R_x) d\mu$$

**Proposizione 2**.

(i) $\quad (\mu \times \nu)(A \times B) \ = \ \mu(A)\nu(B), \quad \forall R = A \times B \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$

(ii) $\quad R_1 \cap R_2 = \emptyset \Rightarrow (\mu \times \nu)(R_1 \cup R_2) \ = \ (\mu \times \nu)(R_1) \ + \ (\mu \times \nu)(R_2)$

(iii) $\quad \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu \ \subset \ \Sigma_{\mu \times \nu}$.

Prova. (i) $R \subset \cup_j R_j$, $R_j \ = \ A_j \times B_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu \ \Rightarrow \ \nu(R_x) \le \sum_j \nu((R_j)_x) \quad \Rightarrow$ $\mu(A)\nu(B) \ \le \ \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) \quad \Rightarrow \quad \mu(A)\nu(B) \ \le \ (\mu \times \nu)(R) \ \le \ \mu(A)\nu(B)$.

(ii) Se $R_1 \cup R_2 \subset \cup \hat{R}_j$, $\quad \hat{R}_j \ = \ \hat{A}_j \times \hat{B}_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$, allora

$$\nu((R_1)_x) + \nu((R_2)_x) \le \sum_j \nu((\hat{R}_j)_x) \Rightarrow (\mu \times \nu)(R_1) + (\mu \times \nu)(R_2) \le \sum_j \mu(\hat{A}_j)\nu(\hat{B}_j)$$

$$\Rightarrow (\mu \times \nu)(R_1) + (\mu \times \nu)(R_2) \le (\mu \times \nu)(R_1 \cup R_2)$$

(iii) Intanto $(\mu \times \nu)(R) \ = \ (\mu \times \nu)(R \cap Q) \ + \ (\mu \times \nu)(R \setminus Q) \ \ \forall R, Q \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ in virtú di (ii), perché $R \setminus Q$ é unione di (due) rettangoli disgiunti misurabili.

Quindi, se $T \subset X \times Y$, $T \subset \cup_j R_j$, $R_j \;=\; A_j \times B_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ é

$$(\mu \times \nu)(T \setminus R) + (\mu \times \nu)(T \cap R) \;\leq\; (\mu \times \nu)(\cup_j (R_j \setminus R)) \;+\; (\mu \times \nu)(\cup_j (R_j \cap R)) \;\leq$$

$$\leq\; \sum_j \left[(\mu \times \nu)(R_j \setminus R) \;+\; (\mu \times \nu)(R_j \cap R)\right] =$$

$$= \sum_j (\mu \times \nu)(R_j) \;=\; \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j)$$

e quindi, passando all'inf $\quad (\mu \times \nu)(T \setminus R) \;+\; (\mu \times \nu)(T \cap R) \;\leq\; (\mu \times \nu)(T)$.

**Nota**. Abbiamo provato il **'Teorema di Fubini' per i rettangoli** (infatti per funzioni caratteristiche di rettangoli): se $R = A \times B$, allora

$$(\mu \times \nu)(R) = \mu(A)\nu(B) = \int \nu(R_x) d\mu = \int \mu(R^y) d\nu$$

Ció vale anche per un **plurirettangolo** $P = \cup_j R_j$ se $R_j$ sono rettangoli disgiunti: $\nu(P_x) = \sum_j \nu(B_j)\chi_{A_j}$ é misurabile e, da $\sum_j (\mu \times \nu)(R_j) = \int \sum_j \left[\nu((R_j)_x)\right] d\mu$, segue

$$(*) \qquad (\mu \times \nu)(P) = \int \nu(P_x) d\mu = \int \mu(P^y) d\nu$$

Ora, ogni plurirettangolo $P = \cup_i R_i$, $\;R_i = A_i \times B_i \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ si puó scrivere come unione di rettangoli disgiunti (se $\hat{R}_1 = R_1, \hat{R}_{n+1} = R_{n+1} \setminus \cup_{i=1}^n R_i$ é $\cup_j R_j = \cup_j \hat{R}_j$ e $\hat{R}_i$ si puó a sua volta scrivere come unione disgiunta di rettangoli misurabili!). Quindi $\nu(P_x)$ é misurabile e $(*)$ vale **per ogni plurirettangolo** $P$.

**Lemma: Fubini per intersezioni di plurirettangoli**.

Siano $P_j$ plurirettangoli, $\;S = \cap_j P_j$. Sia $(\mu \times \nu)(P_1) < \infty$. Allora

(i) $x \to \nu(S_x)$, $\;\; y \to \mu(S^y)$ sono misurabili

(ii) $(\mu \times \nu)(S) \;=\; \int_X \; \nu(S_x)\, d\mu \;=\; \int_Y \; \mu(S^y)\, d\nu$

Prova. Se $P = \cup_j R_j$, $\;\hat{P} = \cup_j \hat{R}_j$ allora $P \cap \hat{P} = \cup_{ij} R_i \cap \hat{R}_j$ é plurirettangolo, e quindi, sostituendo eventualmente $P_n$ con $\cap_{j=1}^n P_j$, possiamo supporre $P_{n+1} \subset P_n \; \forall n$. Quindi , da $(\mu \times \nu)(P_1) < \infty$ segue $(\mu \times \nu)(S) = \lim_j (\mu \times \nu)(P_j) = \lim_j \int_X \nu((P_j)_x) d\mu$. Siccome $\int_X \nu((P_1)_x) d\mu \;=\; (\mu \times \nu)(P_1) \;<\; \infty$, é $\nu((P_1)_x) \;<\; \infty \quad q.o.\; x$, e quindi $\nu((P_j)_x) \to \nu((\cap_j (P_j)_x) = \nu(S_x)$ per quasi ogni $x$ e quindi $x \to \nu(S_x)$ é misurabile. Infine, $\lim_j \int_X \nu((P_j)_x) d\mu \;=\; \int_X \lim_j \nu((P_j)_x) d\mu$ (convergenza dominata!)

**Proposizione 3 (Regolaritá della misura prodotto)**. Per ogni $T \subset X \times Y$ esistono $P_i$ plurirettangoli misurabili tali che: $T \subset S := \cap_i P_i$, $(\mu \times \nu)(T) = (\mu \times \nu)(S)$

Se infatti $(\mu \times \nu)(T) < \infty$, $\forall i, \exists R_{ij} \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ : $T \subset \cup_j R_{ij}$ $\forall i$, tali che $(\mu \times \nu)(T) + \frac{1}{i} \geq \sum_j (\mu \times \nu)(R_{ij}) \geq (\mu \times \nu)(\cup_j R_{ij}) \geq (\mu \times \nu)(\cap_i \cup_j R_{ij})$.

**Teorema di Fubini I**. Sia $S \in \Sigma_{\mu \times \nu}$, $S \subset \cup_j S_j$, $(\mu \times \nu)(S_j) < \infty$ $\forall j$. Allora

(i) $S_x \in \Sigma_\nu$ *q.o.* $x$, $S^y \in \Sigma_\mu$ *q.o.* $y$

(ii) $x \to \nu(S_x)$, $y \to \mu(S^y)$ sno misurabili

(iii) $(\mu \times \nu)(S) = \int_X \nu(S_x)\, d\mu = \int_Y \mu(S^y)\, d\nu$

Dimostrazione. Sia $S \subset \hat{S} = \cap_j P_j$ con $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(\hat{S})$.

1.: $(\mu \times \nu)(S) = 0 \Rightarrow 0 = (\mu \times \nu)(\hat{S}) = \int \nu(\hat{S}_x)\, d\mu \Rightarrow 0 = \nu(\hat{S}_x) \geq \nu(S_x)$ *q.o.* $x \Rightarrow x \to \nu(S_x)$ é misurabile e $(\mu \times \nu)(S) = 0 = \int \nu(S_x)\, d\mu$.

2.: $(\mu \times \nu)(S) < \infty \Rightarrow (\mu \times \nu)(\hat{S} \setminus S) = 0 \Rightarrow \nu((\hat{S} \setminus S)_x) = 0$ per quasi ogni $x \Rightarrow S_x = \hat{S}_x \setminus (\hat{S} \setminus S)_x \in \Sigma_\nu$ *q.o.* $x$ . e $\nu(S_x) = \nu(\hat{S}_x)$ *q.o.* $x$ é misurabile e $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(\hat{S}) = \int \nu(\hat{S}_x)\, d\mu = \int \nu(S_x)\, d\mu$.

3.: Sostituendo $S_n$ con $\cup_{j=1}^n S_j$ possiamo supporre $S_n \subset S_{n+1}$ e sostituendo $S_n$ con $S_n \cap S$ possiamo supporre che $S = \cup_n S_n$. Ora, $(\mu \times \nu)(S_j) < \infty \Rightarrow S_x = \cup (S_j)_x \in \Sigma_\nu$ *q.o.* $x$, $\nu(S_x) = \lim_j \nu((S_j)_x)$ é misurabile e $\int \nu(S_x) = \lim_j \int \nu((S_j)_x)\, d\mu = \lim_j (\mu \times \nu)(S_j) = (\mu \times \nu)(S)$.

NOTA. L'ipotesi di $(\mu \times \nu)$ $\sigma-$ finitezza su $S$ é essenziale.

**Teorema di Fubini II**. Sia $\int_{X \times Y} |f|\, d(\mu \times \nu) < \infty$ . Allora

(i) $x \to f(x,y)$, $y \to f(x,y)$ sono sommabili per quasi ogni $x$, (risp. per quasi ogni $y$)

(ii) $y \to \int_X f(x,y)\, d\mu$, $x \to \int_Y f(x,y)\, d\nu$ sono sommabili e

$$\int_Y \left( \int_X f(x,y)\, d\mu \right) d\nu = \int_X \left( \int_Y f(x,y)\, d\nu \right) d\mu = \int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu)$$

Dimostrazione. Sia $0 \ \le f \ = \ \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}, \ \ S_j \in \Sigma_{\mu\times\nu}$ . Intanto,

$$\infty \ > \ \int_{X\times Y} f \ = \ \sum_j \frac{1}{j}(\mu\times\nu)(S_j) \ \Rightarrow \ (\mu\times\nu)(S_j) \ < \ \infty \ \ \forall j \ \Rightarrow$$

$$(S_j)_x \in \Sigma_\nu \ \ \forall j, \ \ q.o. \ x$$

Per tali x le funzioni $y \to \chi_{S_j}(x,y) = \chi_{(S_j)_x}(y)$ sono tutte misurabili e quindi tale risulta

$$y \to f(x,y) \ = \ \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}(x,y) \ = \ \sum_j \frac{1}{j}\chi_{(S_j)_x}(y)$$

Integrando rispetto a $y$, otteniamo che

$$\int_Y f(x,y)d\nu \ = \ \int_Y (\sum_j \frac{1}{j}\chi_{(S_j)_x})\, d\nu \ = \ \sum_j \frac{1}{j}\nu((S_j)_x)$$

é misurabile (in $x$) e integrando (in $x$) otteniamo

$$\int_X(\int_Y f(x,y)d\mu)d\mu = \int_X(\int_Y \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}(x,y)\, d\nu)\, d\mu \ =$$

$$= \int_X \left[\sum_j \frac{1}{j}\nu((S_j)_x)\right] d\mu \ = \ \sum_j \frac{1}{j}(\mu\times\nu)(S_j) \ = \ \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu)$$

Analogamente,

$$\int_Y(\int_X \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}(x,y)\, d\mu)\, d\nu \ = \ \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu)$$

Per concludere: $\int f d(\mu\times\nu) \ = \ \int f^+ - f^- \ := \int_X(\int_Y f^+ d\nu)d\mu \ - \ \int_X(\int_Y f^- d\nu)d\mu \ = \int_X(\int_Y f d\nu)d\mu$.

NOTA. Lṕotesi $\int_{X\times Y}|f| \ < \ \infty$ é essenziale.

**Teorema di Fubini-Tonelli**. Sia $\mu\times\nu \ \ \sigma$ finita, $f \ \ \mu\times\nu$ misurabile. Allora

$$\int_X (\int_Y |f|\, d\nu)\, d\mu \ < \ \infty \ \ \Rightarrow \ \ \int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\times\nu) \ < \ \infty$$

e quindi valgono le conclusioni del Teorema di Fubibi II.

Basta osservare che l'ipotesi di $\sigma$ finitezza assicura che, se $|f| \ = \ \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}$, agli $S_j$ é applicabile il Teorema di Fubini I. La dimostrazione continua come per Fubini II.

NOTA L'ipotesi di $\sigma$ finitezza é essenziale.

# AM5: Esercizi e problemi-IV Settimana

**Convergenza in misura.** $f_n$ converge a $f$ in misura se

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) \to_n 0 \ \ \forall \epsilon > 0$$

**Problema 1**. Provare che

$\int |f_n - f| \to 0 \ \Rightarrow \ f_n \to f$ in misura

**Problema 2**. Provare che

$f_n \to f$ in misura $\Rightarrow \exists n_k \to \infty : \ f_{n_k} \to f \ \ q.o.$

**Problema 3 (Teorema di Vitali)** . Siano $f_n$ sommabili tali che

$(i)$ $f_n \to f$ in misura

$(ii)$ $\forall \, \epsilon > 0, \, \exists \delta_\epsilon > 0 : \ \mu(A) \leq \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \sup_n \int_A |f_n| \ \leq \ \epsilon$

$(iii)$ $\forall \epsilon > 0, \, \exists A_\epsilon : \ \ \mu(A_\epsilon) < \infty$ e $\sup_n \int_{A_\epsilon^c} |f_n| \ \leq \ \epsilon$

Provare che $f$ é sommabile e $\int |f_n - f| \to 0$.

**Problema 4**. Siano $f_n$ misurabili, $A$ misurabile di misura finita. Provare che

$$f_n \to f \ \ q.o. \Rightarrow \mu(\{x \in A : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to_n 0$$

**Problema 5 (Teorema di Egoroff)**. Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $0 \geq f_n$ misurabili, $f_n(x) \to 0 \ \ \forall x$. Provare che

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \ \text{ misurabile } \ : \ \mu(A_\epsilon) \leq \epsilon \ \text{ e } \ f_n \to 0 \quad \text{uniformemente in} A \setminus A_\epsilon$$

*Suggerimento. Provare che* $\forall j, \epsilon, \ \exists n(\epsilon, j) : \ \mu(\cup_{n \geq n(\epsilon,j)} \{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \ \leq \frac{\epsilon}{2^j}$ *e considerare* $A_\epsilon := \cup_j \ \cup_{n \geq n(\epsilon,j)} \{g_n \geq \frac{1}{j}\}$

**Esercizio 1.** Siano $X = Y = [0,1]$ e siano $\mu$ la misura di Lebesgue e $\nu$ la misura che conta. Sia $D = \{(x,x) : \ x \in [0,1]$.

Provare che $D$ é $\mu \times \nu$-misurabile e calcolare $(\mu \times \nu)(D)$.

Provare che $\nu(D_x)$ é $\mu$-misurabile, che $\mu(D^y)$ é $\nu$-misurabile.

É $\int_X \nu(D_x) d\mu = \int_Y \mu(D^y) d\nu$ ?

**Esercizio 2.** Siano $X = Y = [0,1]$ muniti della misura di Lebesgue . Siano

$$I_0 = [0, \frac{1}{2}], I_1 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}], \dots I_n = [\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}], \quad n \in \mathbf{N}$$

$$R_j = I_{j-1} \times I_{j-1}, \qquad \hat{R}_j = I_j \times I_{j-1}, \qquad j \in \mathbf{N}$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1}\chi_{R_n} - 2^{2n}\chi_{\hat{R}_n}$$

Mostrare che $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy$, $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx$ esistono entrambi ma sono diversi.

Perché non si applica in questo caso il Teorema Fubini-Tonelli?

**Esercizio 3.** Sia $f_n(x) = |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n}$, $x \in (0, 2\pi)$, $k_n \in \mathbf{N}, p_n \to +\infty$. Provare che $f_n$ converge a zero in misura.

*Sugg. Confrontare* $L^1(\{x : |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n} \geq \epsilon\})$ *con* $L^1(\{x : |\sin x|^{p_n} \geq \epsilon\}$

**Esercizio 4**. Discutere convergenza puntuale, uniforme, in media, in misura, per le seguenti successioni di funzioni:

$(i) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in (0,1)$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in (1, +\infty)$

$(ii) f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in (0,1)$, $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in (1, +\infty)$

$(iii) f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^2}$, $x \in (1, +\infty)$

$(iv) f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^4)\log(n+1)}$

**Esercizio 5.** Siano $f_n, g$ misurabili in $\mathbf{R}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi tutti gli $x$. Provare che

$$L^1(\{g \geq \epsilon\}) < \infty \ \ \forall \epsilon > 0, \quad f_n \to 0 \, q.o. \Rightarrow f_n \to 0 \ \text{ in misura}$$

*Suggerimento.* $L^1(\{|f_n| \geq \epsilon\}) = L^1(\{x : |x| \leq r, |f_n(x)| \geq \epsilon\}) + L^1(\{x : |x| > r, |f_n(x) \geq \epsilon\} \dots$

**Esercizio 6** Provare che $L^{n+m} = L^n \times L^m$

**CENNI DI SOLUZIONE**

**Problema 1** Segue da $\int |f_n - f| \ \geq \ \epsilon\mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\})$.

**Problema 2** Sia $g_n := |f_n - f|$. Dall'ipotesi:

$$\forall j\ \exists n_j:\ \mu(\{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{1}{2^j}\quad \forall n \geq n_j$$

Dunque $\mu(\cap_k \ \cup_{j\geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) = 0$. Ma

$$x \notin \cap_k \ \cup_{j\geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\} \ \Rightarrow \ \exists k:\ g_{n_j}(x) \ < \ \frac{1}{j}\ \forall j \geq k$$

cioé $g_{n_j}(x) \to 0$

**Problema 3** Dal Problema 2 segue che $f$ é misurabile e, per Fatou, $\int_A |f| \leq \sup_n \int_A |f_n|$ per ogni misurabile $A$. In particolare, se $A_\epsilon$ é come in (iii), $\int_{A_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon$ e, per (ii), $\int_A |f| \leq \epsilon$ se $\mu(A) \leq \delta_\epsilon$. Dall'ipotesi (i) segue che

$$\exists n_\epsilon:\ \ n \geq n_\epsilon \Rightarrow \mu(\{x \in A_\epsilon:\ |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{\mu(A_\epsilon)}\} \leq \delta_\epsilon$$

e quindi, per (ii),

$$\sup_m \int_{A_{\epsilon,n}} |f_m| \leq \ \epsilon\ \ \forall n \geq n_\epsilon$$

Si conclude che

$$\int |f_n - f| \ \leq \ \int_{A_\epsilon^c} (|f_n| + |f|) \ + \ \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f_n - f| \ + \ \int_{A_{\epsilon,n}} (|f_n| + |f|) \ \leq 5\epsilon.$$

**Problema 4**. Sia $g_n := |f_n - f|$. Sia

$$A_0 := \{x \in A:\ g_n \to 0\} \ = \ \cap_j \ \cup_n \ \cap_{k\geq n} \{x \in A:\ g_k \leq \frac{1}{j}\}$$

Dall'ipotesi, essendo $\mu(A) < \infty$, é:

$$0 = \mu((A \setminus A_0) \ = \ \mu(A \cap [\cup_j \ \cap_n \ \cup_{k\geq n} \{x \in A:\ g_k \ > \ \frac{1}{j}\}])$$

e quindi $\mu(\cap_n \ \cup_{k\geq n} \{x \in A:\ g_k \ > \ \frac{1}{j}\}) = 0\ \ \forall j$. Da $\mu(A) < \infty$ segue infine

$$\mu(\{x \in A:\ g_k \ > \ \frac{1}{j}\}) \ \leq \ \mu(\cup_{k\geq n}\{x \in A:\ g_k \ > \ \frac{1}{j}\}) \to 0$$

**Esercizio 1.** $D = \cap_n \cup_{i=1}^n [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Dunque $D$ é misurabile nel prodotto.

Poi, $\nu(D_x) \equiv 1, \quad \mu(D^y) \equiv 0, \quad \int_X \nu(D_x) d\mu = 1 \neq 0 = \int_Y \mu(D^y) d\nu$.

**Esercizio 2.** $y \in I_{n-1} \quad \Rightarrow$

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \frac{2^{2n-1}}{2^n} - \frac{2^{2n}}{2^{n+1}} = 0 \quad \Rightarrow \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy = 0$$

mentre $\quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy \equiv 1$

$$\frac{1}{2} < x \leq 1 \quad \Rightarrow \int_0^1 f(x,y)dy \equiv -2^n + 2^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx = \frac{1}{2}$$

**Esercizio 4** Basta considerare il caso $n = m = 1$.

Basta provare che $L^2 \leq L^1 \times L^1$. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$ tale che $(L^1 \times L^1)(A) < +\infty$ e sia quindi $A \subset \cup_j A_j \times B_j \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ Lebesgue misurabili tali che $\sum_j L^1(A_j) L^1(B_j) < +\infty$. Siano quindi $A_j \subset \cup_i I_{ij}, \;\; B_j \subset \cup_k J_{kj}$ con

$$\sum_i l(I_{ij}) \leq L^1(A_j) + \epsilon a_j, \;\; \sum_k l(J_{kj}) \leq L^1(B_j) + \epsilon b_j$$

per cui $A \subset \cup_{ikj} I_{ij} \times J_{kj}$ e quindi

$$L^2(A) \leq \sum_{ikj} l(I_{ij}) \; l(J_{kj}) \leq \sum_j (L^1(A_j) + \epsilon a_j) \; (L^1(B_j) + \epsilon b_j) =$$

$$= \sum_j [L^1(A_j) \; (L^1(B_j)] + \epsilon \sum_j [L^1(A_j) b_j + L^1(B_j) a_j] + \epsilon^2 \sum_j a_j b_j$$

Prendendo $a_j = L^1(A_j), \;\; b_j = L^1(B_j)$ troviamo

$$L^2(A) \leq (1+\epsilon)^2 \sum_j [L^1(A_j) \; (L^1(B_j)]$$

e quindi $L^2(A) \leq (1+\epsilon)^2 (L^1 \times L^1)(A)$.