AM5: Tracce delle lezioni- III Settimana

Il Lemma di Fatou. Siano $f_n \geq 0$ misurabili. Allora

$$\underline{\lim} \int f_n \geq \int \underline{\lim}\, f_n$$

Segue da: $\int f_n \geq \int \inf_{k\geq n} f_k \to \int \underline{\lim}\, f_n$ (convergenza monotona).

Definizione di sommabilitá. Una f misurabile si dice sommabile se

$$\int |f| < \infty. \text{ In tal caso, } \int f := \int f^+ - \int f^-$$

Proposizione 1.

(i) f, g sommabili $\Rightarrow tf + sg$ é sommabile per ogni t, s e $\int tf + sg = t\int f + s\int g$

(ii) $f \leq g,\ f, g$ sommabili $\Rightarrow \int f \leq \int g,\ |\int f| \leq \int |f|$

(iii) $\int |f| = 0$ sse l'insieme $\{f \neq 0\}$ ha misura nulla (f é nulla q. o.)

(iv) f é sommabile $\Rightarrow$ $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$

(v) f é sommabile $\Rightarrow$ $\{|f| \neq 0\}$ é $\sigma-$**finito**, cioé

esistono E_j misurabili e di misura finita tali che $\{|f| \neq 0\} \subset \cup_j E_j$

Prova di (i). $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \Rightarrow (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \Rightarrow \int (f+g)^+ + \int f^- + \int g^- = \int (f+g)^- + \int f^+ + \int g^+ \Rightarrow \int (f+g)^+ - \int (f+g)^- = \int f^+ - \int f^- + \int g^+ - \int g^-$

Prova di (iii). φ indica una funzione semplice: $\int |f| = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0 \leq \varphi \leq |f| \Rightarrow \int \varphi = 0) \Leftrightarrow (0 \leq \varphi \leq |f| \Rightarrow \mu(\{\varphi \neq 0\} = 0) \Leftrightarrow \mu(\{|f| \neq 0\} = 0$$

Prova di (iv). $\int |f| \geq \int |f|\ \chi_{\{|f|\geq n\}} \geq n\, \mu(\{|f| \geq n\}) \Rightarrow \mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| \quad \forall n \in \mathbf{N}$

Prova di (v). $\{f \neq 0\} = \cup_n \{|f| \geq \frac{1}{n}\}$ e $\int |f| \geq \int |f|\ \chi_{\{|f|\geq \frac{1}{n}\}} \geq \frac{1}{n}\mu(\{|f| \geq \frac{1}{n}\})$.

Il teorema di Lebesgue (o della convergenza dominata).

Siano f_n sommabili, $f_n \to f\ \forall x \in E_0$ con $\mu(E_0^c) = 0$ (ovvero $f_n \to f$ q.o.).

Allora, $\quad \exists g \geq 0$ sommabile $\ :\ |f_n(x)| \ \leq\ g(x)\ \ \forall n,\ \ q.o.x\ \Rightarrow \displaystyle\int |f_n - f| \to 0$

Prova. Sia $|f_n(x)| \ \leq\ g(x)\,\forall x \in E_n$, con $\mu(E_n^c) = 0$. Sia $E := \cap_{n=0}^{\infty} E_n$. Dunque $g_n := \frac{1}{2}|f_n - f|\,\chi_E \to 0$ e $g_n \leq g \quad \forall x$. Da Fatou: $\underline{\lim} \int (g - g_n) \geq \int g$, e quindi $\overline{\lim} \int g_n \ \leq\ 0$.

Nota. L'ipotesi di 'equidominatezza' é essenziale.

Ad esempio, $\chi_{[n,n+1]}(x) \to 0\,\forall x \in \mathbf{R}$ ma $\int_{\mathbf{R}} \chi_{[n,n+1]} = 1\,\forall n$.

Un altro esempio é dato dai cambiamenti di scala. Se $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, sia $f_n(x) := n^N f(nx)$. Siccome $\int_{\mathbf{R}^N} n^N \chi_E(nx)\,dx = n^N L^N(\frac{1}{n}E) = L^N(E)$ é $\int_{\mathbf{R}^N} f_n = \int_{\mathbf{R}^N} f$. Se allora, ad esempio, $f \in C_0(\mathbf{R}^N)$, si ha $f_n(x) \to 0\,\forall x \neq 0$ ma $\int_{\mathbf{R}^N} f_n = \int_{\mathbf{R}^N} f$.

Teorema 1: completezza della metrica della convergenza in media.

Siano f_n sommabili e tali che

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_\epsilon :\quad n, m \geq n_\epsilon \Rightarrow \int |f_n - f_m| \ \leq \epsilon$$

Allora esiste f sommabile tale che $\int |f_n - f| \to 0$. Inoltre, esiste una sottosuccessione f_{n_k} equidominata e convergente a f quasi ovunque.

Dimostrazione. Dalla condizione di Cauchy: esiste n_k tale che $\int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \frac{1}{2^k}$. Posto $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$, da $\sum_k \int |g_k| \ <\ +\infty$ segue che $g := \sum_k |g_k|$ é sommabile e quindi finita q.o., e quindi la serie $\sum_k g_k$ converge q.o., ovvero $f(x) := \lim f_{n_k}$ esiste q.o. Inoltre, $|f_{n_k}| \leq |f_1| + g$, e quindi $\int |f_{n_k} - f| \to 0$ (convergenza dominata). Vista la condizione di Cauchy, é, di piú $\int |f_n - f| \to 0$.

Definizione di $L^1(\mu)$. $\quad L^1(\mu) = \{[f] :\ \ \int |f| < \infty\}, \quad [f]\ := \{g : g = f\ \ q.o.\}$

Possiamo riformulare i fatti mostrati dicendo che

$$\to \qquad \|f\| \ := \int |f| \qquad \text{é una norma su} \qquad L^1(\mu)$$

$$\to \qquad (L^1, \|f\|) \qquad \text{é uno spazio di Banach}$$

Definizione. Sia f sommabile ed E misurabile. É

$$\int_E f \ :=\ \int f\,\chi_E$$

Proposizione. Sia f sommabile, Σ la classe dei misurabili. Allora

(i) $\quad A \subset B \;\Rightarrow\; \int_A \ |f| \;\le\; \int_B \ |f|$

(ii) $\int_{\{f \ge c\}} f \;\ge\; c\ \mu(\{f \ge c\}) \quad \forall c$

(iii) $\quad (\inf_A f)\ \mu(A) \;\le\; \int_A \ f \;\le\; (\sup_A f)\ \mu(A)$

(iv) $\quad A_j \in \Sigma,\ \ A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall\, i \ne j \quad \Rightarrow\ \int_{\cup_j A_j} f \;=\; \sum_j \int_{A_j} \ f$

(v) $\quad A_j \in \Sigma,\ A_j \subset A_{j+1}\ \forall j \quad \Rightarrow\ \int_{A_j} \ f \ \to\ \int_{\cup_j A_j} \ f$

(vi) $\quad A_j \in \Sigma,\ \ A_{j+1} \subset A_j\ \forall j \quad \Rightarrow\ \int_{A_j} f \ \to\ \int_{\cap_j A_j} \ f$

Prova di (iv). $\quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\, i \ne j \quad \Rightarrow \quad \chi_{\cup_j A_j} = \sum_j \chi_{A_j} \quad \Rightarrow \quad f \ \ \chi_{\cup_j A_j} = \lim_n \sum_{j=1}^n f\, \chi_{A_j}$ e $|\sum_{j=1}^n f \ \ \chi_{A_j}| \le |f|$. Dal teorema di Lebesgue,

$$\int_{\cup_j A_j} f = \int f \chi_{\cup_j A_j} = \int \lim_n \sum_{j=1}^n f\, \chi_{A_j} = \lim_n \sum_{j=1}^n \int_{A_j} f = \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} f$$

Prova di (v) e (vi). $\quad$ Si ha, rispettivamente, $\ \chi_{A_j} \to \chi_{\cup_j A_j}, \quad \chi_{A_j} \to \chi_{\cap_j A_j}, \quad |f\chi_{A_j}| \le |f|$. $\quad$ Dal Teorema di Lebesgue,

$$\int_{\chi_{A_j}} f = \int f\chi_{A_j} \to \int f\chi_{\cup_j A_j} = \int_{\chi_{\cup_j A_j}} \qquad \text{e} \qquad \int_{\chi_{A_j}} f = \int f\chi_{A_j} \to \int f\chi_{\cap_j A_j} = \int_{\chi_{\cap_j A_j}} f$$

Proposizione 2: Assoluta continuitá dell'integrale.

Sia f sommabile. Allora

$$(i) \quad \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\ \delta_\epsilon > 0 :\ \ \mu(A) \ \le\ \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int_A |f| \ \le\ \epsilon$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists A_\epsilon :\ \ \mu(A_\epsilon) \ <\ \infty \qquad \text{e} \qquad \int_{A_\epsilon^c} |f| \ \le\ \epsilon$$

Prova. $\quad$ (i) Per assurdo: $\quad \exists \epsilon_0 > 0,\ \exists A_j$ tali che $\ \mu(A_j) \le \frac{1}{2^j}$ e $\int_{A_j} |f| \ge \epsilon_0$. Se $\quad B := \cap_n \ \cup_{j \ge n} A_j$, risulta $\ \mu(B) = 0$ e $\int_B |f| \ =\ \lim_n \int_{\cup_{j\ge n} A_j} |f| \ \ge\ \epsilon_0$, contraddizione.

(ii) É $\ \{|f| > 0\} = \cup A_n,\ A_n := \{|f| \ge \frac{1}{n}\}\ ,\ \ \mu(A_n) < \infty,\ \int |f| = \lim \int_{A_n} |f|$. Dunque, $\qquad \exists n_\epsilon : \qquad \epsilon + \int_{A_{n_\epsilon}} |f| \ge \int |f| = \int_{A_{n_\epsilon}} |f| + \int_{A^c_{n_\epsilon}} |f|$.

AM5: Esercizi e problemi-III Settimana

Esercizio 1. Siano f_n misurabili, $0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ per ogni n e q.o. x. Provare che $\exists n : \quad \int f_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int f_n \to \int \lim f_n$
e che l'ipotesi $\exists n : \int f_n < +\infty$ é essenziale.

Esercizio 2. Provare che $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \int |f| \le \sup \int |f_n|$

Esercizio 3. Sia μ la misura che conta su un certo insieme X. Provare che
$\int_X |f| \, d\mu = \sup\{\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)| : \quad A \subset X, A \text{ finito } \}$ e che
$\int_X |f| \, d\mu < +\infty \quad \Rightarrow \quad \{x : \ f(x) \ne 0\}$ é al piú numerabile.

Esercizio 4. Provare che se $\sum f_n(x)$ converge quasi per ogni x ed esiste g sommabile tale che $|\sum_1^n f_j(x)| \le g(x)$ quasi per ogni x, allora $\sum f_n$ è sommabile e $\int \sum f_n = \sum \int f_n$.

Esercizio 5. Sia $\mu(X) < \infty$. Provare che

$$\int |f| < +\infty \ \Leftrightarrow \ \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{x : |f(x)| \ge n\}) < +\infty$$

Esercizio 6. Sia $\int |f_n - f| \to 0$. Provare che

$$(i) \ \ \forall\, \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ \ \mu(A) \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \sup_n \int_A |f_n| \ \le \ \epsilon$$

$$(ii) \ \ \forall \epsilon > 0, \ \exists A_\epsilon : \ \ \mu(A_\epsilon) < \infty \ \text{ e } \ \sup_n \int_{A_\epsilon^c} |f_n| \ \le \ \epsilon$$

Esercizio 7. Provare che $\int_A e^{inx} dx \to 0 \forall A \subset [0, \pi]$ misurabile.

Dedurre che , se $n_k < n_{k+1}$, l'insieme $\{x \in [0, \pi] : \sin(n_k x)$ converge $\}$ è di misura nulla.

Suggerimento. Posto $A = \{x : \ \exists \lim_k \sin(n_k x)\}, \ \ f(x) := \lim \chi_A \sin(n_k x)$, *considerare* $\lim_k \int_0^\pi \sin(n_k x) \chi_{\{f \ge 0\}} \cdots$

Esercizio 8. Sia $f \in C(\mathbf{R})$ 1-periodica. Provare che $\int_0^1 f = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N f(n\alpha) \forall \alpha$ irrazionale .

Suggerimento: provarlo dapprima per $f = e^{2\pi kix}$.