

## AM5: Tracce delle lezioni- I Settimana

### Definizione 1: Misure "esterne".

Dato un insieme  $X$ , sia  $P(X) := \{A : A \subset X\}$  l'insieme delle parti di  $X$ . Una funzione  $\mu : P(X) \rightarrow [0, +\infty]$ , si chiama misura (esterna), se  $\mu(\emptyset) = 0$  e

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) \quad \text{(numerabile subadditivit\`a)}$$

OTA.  $\mu$  \`e monotona:  $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ .

### Definizione 2: $\sigma$ -algebre, misure.

Dato un insieme  $X$ , una famiglia  $\Sigma$  di sottoinsiemi di  $X$  si chiama  $\sigma$ -algebra se

$$(i) \ \emptyset \in \Sigma, \quad (ii) \ E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma, \quad (iii) \ E_j \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \in \Sigma$$

Una funzione  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ , si chiama misura se:  $\mu(\emptyset) = 0$  e

$$E_j \in \Sigma, E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i \neq j \Rightarrow \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j) \quad \text{(numerabile additivit\`a)}$$

OTA. Siccome  $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$ ,  $\bigcap_j A_j = (\bigcup_j A_j^c)^c$ , si ha che

$$A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma, \quad A_j \in \Sigma \Rightarrow \bigcap_j A_j \in \Sigma$$

**Proposizione 1.** Sia  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  misura. Allora

- (i)  $A, B \in \Sigma, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
- (ii)  $A, B \in \Sigma, A \subset B, \mu(A) < +\infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- (iii)  $E_j \in \Sigma, E_j \subset E_{j+1} \ \forall j \Rightarrow \mu(E_j) \rightarrow \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j)$
- (iv)  $E_j \in \Sigma, E_{j+1} \subset E_j \ \forall j, \mu(E_1) < +\infty \Rightarrow \mu(E_j) \rightarrow \mu(\bigcap_{j=1}^{+\infty} E_j)$

Infatti,

$$(i)-(ii) \ B = (B \setminus A) \cup A \Rightarrow \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$$

(iii) \`E  $\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j = E_1 \cup \left( \bigcup_{j=1}^{+\infty} [E_{j+1} \setminus E_j] \right)$  e  $E_{n+1} = E_1 \cup \left( \bigcup_{j=1}^n [E_{j+1} \setminus E_j] \right)$  (unione disgiunta), e quindi

$$\mu(E_{n+1}) = \mu(E_1) + \sum_{j=1}^n \mu(E_{j+1} \setminus E_j) \rightarrow_n \mu(E_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_{j+1} \setminus E_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j)$$

(iv) Siccome  $E_1 \setminus E_j \subset E_1 \setminus E_{j+1}$  e  $\cup_j (E_1 \setminus E_j) = E_1 \setminus \cap_j E_j$ , da (ii)- (iii) segue

$$\mu(E_1) - \mu(E_j) \rightarrow \mu(\cup_i (E_1 \setminus E_i)) = \mu(E_1 \setminus \cap_i E_i) = \mu(E_1) - \mu(\cap_i E_i)$$

### Esempi: le misure (esterne) di Lebesgue e di Hausdorff in $\mathbf{R}^N$

**Misura di Lebesgue.** Qui  $R = I_1 \times \dots \times I_N$ ,  $I_j$  intervalli in  $\mathbf{R}$ , denota un rettangolo in  $\mathbf{R}^N$ , e  $\text{Vol}(R) = l(I_1) \times \dots \times l(I_N)$  é il suo volume ( $l(I) :=$  lunghezza di  $I$ ). La misura di Lebesgue  $L^N$  é definita dalla posizione:

$$L^N(A) := \inf \left\{ \sum_1^{+\infty} \text{Vol}(R_j) : A \subset \cup_j R_j \right\}, \quad A \subset \mathbf{R}^N$$

$L^N$  é misura (esterna). Infatti, dato  $A \subset \cup_j A_j$ , e supposto  $\mu(A_j) < \infty \forall j$ , sia  $A_j \subset \cup_i R_{ij}$  con  $\sum_i \text{Vol}(R_{ij}) \leq L^N(A_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$ . Allora  $A \subset \cup_{ij} R_{ij}$  e quindi  $L^N(A) \leq \sum_{ij} \text{Vol}(R_{ij}) \leq 2\epsilon + \sum_j L^N(A_j)$ .

### Invarianza per traslazione, N-omogeneitá.

$$L^N(A + h) = L^N(A), \quad L^N(tA) = t^N L^N(A) \quad \forall A \subset \mathbf{R}^N, \quad h \in \mathbf{R}^N, t \geq 0$$

**Nota.** (i)  $L^N(R) = \text{Vol}(R)$  per ogni rettangolo  $R$  (ii)  $L^N$  non é additiva.

(ii) Consideriamo il caso  $N=1$ . Sia  $A_x := (x + \mathbf{Q}) \cap [0, 1]$ . É  $x - y \notin \mathbf{Q} \Rightarrow A_x \cap A_y = \emptyset$ ,  $x - y \in \mathbf{Q} \Rightarrow A_x = A_y$ . Poi, dall'assioma della scelta:  $\exists Z \subset \mathbf{R}$  tale che  $\forall x : Z \cap A_x$  é esattamente un punto. Proprietá di  $Z$ :

$$\cup_{q \in \mathbf{Q}} (Z + q) = \mathbf{R}, \quad q_1 \neq q_2 \Rightarrow (Z + q_1) \cap (Z + q_2) = \emptyset$$

Sia poi  $\alpha : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$  biiezione,  $q_j := \alpha(j)$ . Da  $L^1(\mathbf{R}) \leq \sum_j L^1(Z + q_j) = \sum_j L^1(Z)$ , segue  $L^1(Z) > 0$ . Sia infine  $q_{j_k} \in [0, 1] \forall k$  e quindi  $2 = L^1([0, 2]) \geq L^1(\cup_1^n (Z + q_{i_k}))$ . Se  $L^1(\cup_1^n (Z + q_{i_k})) = \sum_1^n L^1(Z + q_{i_k}) = nL(Z)$ , deve essere  $n \leq \frac{2}{L^1(Z)}$ .

**Misura di Hausdorff.** Dati  $s \geq 0$ ,  $\delta > 0$   $A \subset \mathbf{R}^n$ , siano

$$H_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} (\text{diam } C_j)^s : A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} C_j, \quad C_j = \overline{C}_j, \quad \text{diam } C_j \leq \delta \right\}$$

$$H^s(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A)$$

$H^s$  é misura (esterna) (detta di Hausdorff s-dimensionale).

**Definizione 3: Insiemi misurabili.** Sia  $\mu$  misura (esterna) su  $X$ . Diremo che

$E \subset X$  è  $\mu$ -misurabile se  $\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c), \forall A \subset X$

o, equivalentemente,  $A \subset E, B \subset E^c \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

$\Sigma_\mu$  denoterá la classe dei  $\mu$ -misurabili.

NOTA. (i)  $\mu(E) = 0 \Rightarrow E \in \Sigma_\mu$ .

(ii)  $E \subset \mathbf{R}^n$  é (Lebesgue) misurabile  $\Rightarrow E + h, tE$  sono (Lebesgue) misurabile .

**Proposizione 1 :**  $\mu|_{\Sigma_\mu}$  é una misura

(i)  $E_j \in \Sigma_\mu, E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j \Rightarrow \mu(\cup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$

(ii)  $\Sigma_\mu$  è una  $\sigma$ -algebra

Prova di (i):  $E \in \Sigma_\mu, A \cap E = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup E) = \mu(A) + \mu(E)$ . Dall'ipotesi segue quindi  $\mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_1^n \mu(E_i), \forall n$  e quindi  $\sum_1^{+\infty} \mu(E_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{+\infty} E_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^n E_i) = \sum_1^n \mu(E_i) \forall n$ .

Prova di (ii) : Ovviamente  $\emptyset \in \Sigma_\mu$  e  $E \in \Sigma_\mu$  se e solo se  $E^c \in \Sigma_\mu$ . Poi  $E_1, E_2 \in \Sigma_\mu \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2) + \mu(A \cap E_1^c \cap E_2^c) =$

$$= \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \Sigma_\mu$$

In particolare,  $E, F \in \Sigma_\mu \Rightarrow E \setminus F = (E^c \cup F)^c \in \Sigma_\mu$  e quindi  $F_1 := E_1$  e  $F_{n+1} := E_{n+1} \setminus \cup_{j=1}^n E_j$  sono misurabili. Siccome  $\cup_{j=1}^n F_j = \cup_{j=1}^n E_j$  si deduce che gli  $F_n$  sono tutti disgiunti e la loro unione uguaglia l'unione degli  $E_n$ . Sostituendo eventualmente gli  $E_n$  con gli  $F_n$ , possiamo supporre gli  $E_j$  tra loro disgiunti.

Ora, dalla misurabilitá di  $\cup_{j=1}^n E_j$  segue che  $\mu(A) \geq \mu(A \cap (\cup_1^n E_i)) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c)$ . Ma, essendo gli  $E_j$  misurabili e disgiunti, é  $\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_2)$  e quindi, iterando,  $\mu(A \cap (\cup_1^n E_j)) = \sum_{i=1}^n \mu(A \cap E_i)$ . Dunque , passando al limite

$$\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A \cap E_i) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c) \geq \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)) + \mu(A \cap (\cup_{i=1}^{+\infty} E_i)^c)$$

**ESEMPIO** di un insieme in  $\mathbf{R}$  che non é Lebesgue misurabile.

É l'insieme  $Z$  sopra costruito. Se  $Z$  fosse misurabile, sarebbe  $L^1(\cup_j(Z + q_j)) = \sum_j L^1(Z) = +\infty$ , mentre  $\cup_j(Z + q_j) \subset [0, 2] \Rightarrow L^1(\cup_j(Z + q_j)) \leq 2$ .

Sia  $(X, d)$  spazio metrico, e sia  $\mathcal{B}$  la piú piccola sigma algebra che contiene i chiusi di  $X$  ( $\mathcal{B}$  si chiama la sigma algebra dei boreliani di  $X$ ).

**Definizione 4: Misure metriche.**

Una misura (esterna)  $\mu$  su  $X$  si dice misura metrica se

$$0 < d(A, B) \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

**Definizione 5: Misure boreliane.**

Una misura (esterna)  $\mu$  su  $X$  si dice misura boreliana se  $\mathcal{B} \subset \Sigma_\mu$ .

**Lemma .** Siano  $\mu$  misura metrica su  $(X, d)$ ,  $E_j \subset E_{j+1} \forall j$ .

Allora  $d(E_{j+2} \setminus E_{j+1}, E_j \setminus E_{j-1}) > 0 \forall j \geq 2 \Rightarrow \mu(E_j) \rightarrow \mu(\cup_j E_j)$

Siccome  $\mu(E_j) \leq \mu(\cup_j E_j)$ , basta considerare il caso  $\sup_j \mu(E_j) < +\infty$ . Allora

$$\mu(E_2 \setminus E_1) + \dots + \mu(E_{2n} \setminus E_{2n-1}) = \mu(\cup_{j=1}^n [E_{2j} \setminus E_{2j-1}]) \leq \mu(E_{2n}) \leq \sup_j \mu(E_j) < +\infty$$

ed analogamente  $\mu(E_3 \setminus E_2) + \dots + \mu([E_{2n+1} \setminus E_{2n}]) \leq \sup_j \mu(E_j) < +\infty$  e quindi  $\sum_j \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) < +\infty$ . Da qui

$$\cup_j E_j = E_n \cup (\cup_{j \geq n} [E_{j+1} \setminus E_j]) \Rightarrow \mu(\cup_j E_j) \leq \mu(E_n) + \sum_{j \geq n} \mu([E_{j+1} \setminus E_j]) \rightarrow_n \sup_n \mu(E_n)$$

→ Gli  $E_j$  non si suppongono misurabili!

**Proposizione 3:  $\mu$  metrica  $\Rightarrow \mu$  boreliana**

Sia  $C = \overline{C}$  un insieme chiuso. Siano  $A \subset C, B \subset C^c$ .

Sia  $B_n := \{x \in B : d(x, C) \geq \frac{1}{n}\}$ . É  $B = \cup_n B_n$  perché  $B \subset C^c$ , e  $C^c$  é aperto. Inoltre  $d(B_{j+2} \setminus B_{j+1}, B_j \setminus B_{j-1}) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0 \forall j \geq 2$ .

Dal Lemma segue quindi che  $\mu(B_n) \rightarrow \mu(B)$  e quindi

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A \cup B_n) = \mu(A) + \mu(B_n) \rightarrow \mu(A) + \mu(B)$$

**Proposizione 4:  $L^N$  é metrica e quindi boreliana.**

Infatti, sia  $0 < \delta = d(A, B)$ . Dato  $\epsilon > 0$ , siano  $R_j$  tali che

$$A \cup B \subset \cup_j R_j, \quad \text{diam} R_j \leq \frac{\delta}{2}, \quad \sum_j \text{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon$$

Allora  $\mu(A) + \mu(B) \leq \sum_{R_j \cap A \neq \emptyset} \text{Vol} R_j + \sum_{R_j \cap B \neq \emptyset} \text{Vol} R_j \leq \mu(A \cup B) + \epsilon$ .

**Proposizione 5.**  $L^N$  é borel regolare:

$$\forall A \subset \mathbf{R}^N \quad \exists B \in \mathcal{B} : \quad A \subset B \text{ e } L^N(A) = L^N(B)$$

Infatti  $L^N(A) = L^N(\bigcap_j \cup_i R_{ij})$  con  $A \subset \cup_i R_{ij}$ ,  $\sum_i \text{Vol} R_{ij} \leq L^N(A) + \frac{1}{j}$

**Proposizione 6:**  $A_j \subset A_{j+1} \Rightarrow L^N(A_j) \rightarrow L^N(\cup_j A_j)$

→ gli  $A_j$  non sono supposti misurabili!

Verifica: siano  $B_j \in \mathcal{B}$ ,  $A_j \subset B_j$ , tali che  $L^N(A_j) = L^N(B_j)$ .

É  $A_n \subset \bigcap_{j \geq n} B_j$  e  $\bigcap_{j \geq n} B_j$  é famiglia crescente (di misurabili). Dunque

$$L^N(\cup_n A_n) \leq L^N(\cup_n \bigcap_{j \geq n} B_j) = \lim L^N(\bigcap_{j \geq n} B_j) \leq \lim L^N(A_n)$$

**Proposizione 6: Approssimazione mediante aperti, compatti**

i)  $\forall A \subset \mathbf{R}^N : L^N(A) = \inf\{L^N(O) : A \subset O, O \text{ aperto}\}$

ii)  $\forall E$  misurabile :  $L^N(E) = \sup\{L^N(K) : K \subset E, K \text{ compatto}\}$

La i) segue dal fatto che  $\text{vol}(\mathbf{R}) = \text{vol}(\text{int } \mathbf{R})$ .

Per (ii), sia dapprima  $E \subset B_r$ .

Sia  $O_j$  aperto tale che  $\overline{B_r} \setminus E \subset O_j$ , con  $L^N(O_j) \leq L^N(\overline{B_r} \setminus E) + \frac{1}{j} = L^N(\overline{B_r}) - L^N(E) + \frac{1}{j}$ . Sia poi  $K_j := \overline{B_r} \setminus O_j$ . Allora:

$K_j$  é un compatto contenuto in  $E$  e  $L^N(E) \leq L^N(\overline{B_r} \setminus O_j) + \frac{1}{j} = L^N(K_j) + \frac{1}{j}$ .

Nel caso generale, se  $B_n$  denota la palla di raggio  $n$ ,  $L^N(E \cap B_n) \rightarrow_n L^N(E)$ .

Quindi, se  $K_n \subset E \cap B_n$  é compatto tale che  $L^N(E \cap B_n) \leq L^N(K_n) + \frac{1}{n}$  si ha  $L^N(E) \leq \lim_n L^N(K_n) \leq L^N(E)$ .

NOTA. Da ii) segue che, se  $L^N(E) < +\infty$ ,  $E$  é misurabile se e solo se

$$\forall \epsilon, \quad \exists K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon, K_\epsilon \text{ compatto}, O_\epsilon \text{ aperto} : L^N(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$$

In particolare, ogni insieme limitato di  $\mathbf{R}^N$  e misurabile secondo Peano-Jordan (cioé  $\partial E$  é di misura nulla) é Lebesgue misurabile e la sua misura (secondo Peano-Jordan) coincide con  $L^N(E)$ .

## AM5: Esercizi e complementi -I Settimana

**Misura di Hausdorff.** Dati  $s \geq 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $A \subset \mathbf{R}^n$  sia

$$H_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{+\infty} (\text{diam } C_j)^s : A \subset \cup_{j=1}^{+\infty} C_j, C_j = \overline{C}_j, \text{diam } C_j \leq \delta \right\}$$

$$H^s(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A)$$

(i) Provare che  $H^s$  (misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale) é misura boreliana.

(ii)  $H^s(rA) = r^s H^s(A), \forall A \subset \mathbf{R}^n, \forall r > 0$

(iii)  $H^s(A) < +\infty, t < s \Rightarrow H^t(A) = 0$  e  $H^s(A) > 0, t < s \Rightarrow H^t(A) = +\infty$

**Esercizio 1.** Sia  $X$  un insieme .

(i) Per ogni  $A \subset X$ , sia  $\mu(A) =$  numero di elementi di  $A$ , se  $A$  é un insieme finito,  $\mu(A) = +\infty$  se  $A$  non é finito ( $\mu$  é "misura che conta") . Provare che  $\mu$  é una misura sull'insieme delle parti di  $X$ .

(i) Dato  $X_0 \subset X$ , sia  $\delta_{X_0}(E) = 1$  se  $E \cap X_0 \neq \emptyset$ ,  $\delta_{X_0}(E) = 0$  se  $E \cap X_0 = \emptyset$ . Provare che  $\delta_{X_0}$  è una misura su  $X$  e determinarne i misurabili.

**Esercizio 2.** Dato  $X$ , sia  $\Sigma$  una  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $X$ ,  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  misura, e sia  $\hat{\mu}(E) = \inf \{ \sum \mu(A_j) : E \subset \cup A_j, A_j \in \Sigma \}$ .

Provare che  $\hat{\mu}$  è misura (esterna) su  $X$ . Provare che  $\Sigma \subset \Sigma_{\hat{\mu}}$  ( $\Sigma_{\hat{\mu}} = \sigma$ -algebra degli insiemi  $\hat{\mu}$ -misurabili

*Suggerimento:*  $E \in \Sigma, A \subset \cup_j A_j, A_j \in \Sigma \Rightarrow \sum_j \mu(A_j) \geq \hat{\mu}(A \cap E) + \hat{\mu}(A \setminus E) \dots$

**Esercizio 3.** Sia  $A \subset \mathbf{R}$ ,  $L^1(A) > 0$ . Provare che esiste  $E \subset A$  che non é  $L^1$ -misurabile.

*Suggerimento.* Cominciare col provare che  $Z_0 \subset Z, L^1(Z_0) > 0 \Rightarrow Z_0$  non é misurabile ( $Z$  é il noto esempio di insieme non misurabile..). Provare quindi che  $0 < L^1(A \cap (Z + q_j))$  per qualche  $j$

**Esercizio 4.** Mostrare che non é sempre vero che

$$E_j \subset \mathbf{R}, E_{j+1} \subset E_j, L^1(E_1) < +\infty \Rightarrow L^1(E_j) \rightarrow L^1(\cap_j E_j)$$

*Suggerimento.* Da  $\cap_n \cup_{j \geq n} (Z + q_j) = \emptyset \dots$  ove  $Z$  é come sopra..