AM5 - II ESONERO
08.06.05

Tema 1 Sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $\quad B = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| < 1\}$. Provare che

$$\frac{1}{r^N\, vol(B)} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy \to_{r\to 0} f(x) \quad q.o.\ x \in \mathbf{R}^N$$

Tema 2 Sia $\quad l : L^\infty(\mathbf{R}^N) \to \mathbf{R}$ funzionale lineare tale che

$$f_n \in L^\infty, \quad \int_{\mathbf{R}^N} f_n\, g \to_n 0 \quad \forall g \in L^1(\mathbf{R}^N) \quad \Rightarrow \quad l(f_n) \to_n 0$$

Provare che, se $\quad f \in L^\infty, \quad f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad l(f) \geq 0,$ allora

$$\exists\ \ g \in L^1, \quad g \geq 0 : \quad l(f) = \int_{\mathbf{R}^N} f\, g \qquad \forall f \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Tema 3. Provare che

$$f \in L^1(\mathbf{R}^N), \quad \int_{\mathbf{R}^N} f\, g\ =\ 0 \quad \forall g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N) \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad q.o. \quad x \in \mathbf{R}^N$$

Tema 4 Sia $p > 1$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sia $\quad C \subset L^p(\mathbf{R}^N)$ tale che

(i) $\quad f, g \in C, \quad t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad tf + (1-t)g \in C$

(ii) $\quad f_n \in C, \quad f \in L^p, \quad \int_{\mathbf{R}^N} |f_n - f|^p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad f \in C$

Provare allora che

$$f_n \in C, \quad f \in L^p : \qquad \int_{\mathbf{R}^N} f_n\, g \to_n \int_{\mathbf{R}^N} f\, g \quad \forall g \in L^q(\mathbf{R}^N) \quad \Rightarrow \quad f \in C$$

Tema 5 Sia $\quad N \geq 3,\ B = \{x \in \mathbf{R}^N :\ |x| < 1\},\ u_n \in C_0^\infty(B)$. Provare che

$$\sup_n \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u_n|^2 < +\infty \ \Rightarrow\ \exists u_{n_k},\ u \in L^p(B) : \quad \|u_{n_k} - u\|_{L^p(B)} \to_k 0 \quad \forall p \in [0, \frac{2N}{N-2})$$

Mostrare che in generale $\ u_n\ $ non ha sottosuccessioni convergenti in $\ L^{\frac{2N}{N-2}}(B)$.

Esercizio 1.

Sia $\quad f \in L^1(\mathbf{R}^N), \qquad B = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| < 1\}. \qquad$ Provare che

$$\frac{1}{r^N \, vol(B)} \int\limits_{B_r(x)} f(y)\, dy \to_{r\to 0} f(x) \quad \text{in} \quad L^1(\mathbf{R}^N)$$

Esercizio 2.

Sia $\quad p \in (0,1), \quad f(x) = \frac{1}{x^p}\, \chi_{(0,1]}.$

Stabilire per quali $p \in (0,1)$ é vero che $\quad f * f \in C(\mathbf{R}).$

Stabilire per quali $p \in (0,1)$ é vero che $\quad f * f \in C((0,+\infty)).$

Esercizio 3

Sia $\quad p \geq 1, \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|^p}, \quad x \in \mathbf{R}^3.$

Sia $\quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3), \quad 0 \leq \varphi, \quad \int\limits_{\mathbf{R}^3} \varphi = 1.$

$f * \varphi \qquad$ é sommabile se $\qquad p = 3$?

$f * \varphi \qquad$ é sommabile se $\qquad p > 3$?

$f * \varphi \qquad$ é sommabile se $\qquad p < 3$?