AM5: Tracce delle lezioni- VIII Settimana

INTEGRAZIONE IN $\mathbf{R}^N$

Nel seguito, con L^N indicheremo di regola la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.

Ricordiamo che **la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$** ha le seguenti fondamentali proprietá (che in effetti la caratterizzano):

é misura boreliana regolare, invariante per traslazione
é finita sui compatti e positiva sugli aperti

Siccome $L^N(R) = vol(R)$ per ogni rettangolo R,

é invariante per riflessione e positivamente omogenea di grado N

Inoltre valgono le proprietá di approssimazione

$L^N(A) = \inf\{L^N(O) : \quad A \subset O, O \text{ aperto}\} \ \forall A \subset \mathbf{R}^N$

$L^N(E) = \sup\{L^N(K) : \quad K \subset E, K \text{ compatto}\} \ \forall E \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile

Dall'invarianza per traslazione segue l'

invarianza per traslazione dell'integrale

se $\tau_h f(x) := f(x-h), \quad x, h \in \mathbf{R}^N,$ allora

$$\tau_h f \quad \text{é misurabile} \quad \Leftrightarrow \quad f \quad \text{é misurabile} \quad \text{e} \quad \int_{\mathbf{R}^N} (\tau_h f) dL^N = \int_{\mathbf{R}^N} f dL^N$$

Dalla N-omogeneitá e dall'invarianza per riflessione seguono le regole di trasformazione

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(tx) dL^N = t^{-N} \int_{\mathbf{R}^N} f(x) dL^N \quad \forall t > 0, \quad \int_{\mathbf{R}^N} f(-x) dL^N = \int_{\mathbf{R}^N} f(x) dL^N$$

Le regole di trasformazione sopra indicate non sono che casi particolari della generale formula di cambio di variabile, ben nota nell'integrale di Riemann che coincide infatti , sulle funzioni continue a supporto compatto, con l'integrale di Lebesgue.

TEOREMI DI DENSITÁ
(approsimazione in media).

1. Proposizione (approsimazione mediante funzioni semplici). Sia μ misura su $X, p \geq 1$. Allora

per ogni $f \in L^p$ esistono funzioni semplici φ_j tali che $\int |f - \varphi_j|^p \to_j 0$.

Infatti, se $0 \leq f = \lim_j \varphi_j$, $\varphi_j \leq f$ funzioni semplici, é $0 \leq \int (f - \varphi_j)^p \to_j 0$ (convergenza dominata). Basta poi scrivere $f = f^+ - f^-$.

Approssimazione di funzioni sommabili in $\mathbf{R}^n$ mediante funzioni $C_0(\mathbf{R}^N)$.

2. Proposizione (approssimazione di funzioni caratteristiche). Sia $E \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile, $p \geq 1$. Se $L^n(E) < \infty$, allora

$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \varphi_\epsilon \in C_0(\mathbf{R}^N) : \quad \int_{\mathbf{R}^N} |\varphi_\epsilon - \chi_E|^p \leq \epsilon.$

Basta ricordare che esistono K_ϵ compatto, O_ϵ aperto, tali che $K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon$ e $L^N(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$.
Sia $\delta > 0$ tale che $d(x, K_\epsilon) \leq \delta \Rightarrow x \in O_\epsilon$. Basta allora porre $\varphi_\epsilon(x) := \gamma(d(x, K_\epsilon))$ ove $\gamma \in C(\mathbf{R})$ con $\gamma(0) = 1$ e $\gamma(t) = 0$ se $t \geq \delta$.

3. Corollario . Se $\int_{\mathbf{R}^N} |f|^p < \infty$, esistono $f_j \in C_0$ tali che $\int_{\mathbf{R}^N} |f - f_j|^p \to_j 0$.

Segue subito da 1 e 2.

4. Corollario . $\int_{\mathbf{R}^n} |f| < \infty \Rightarrow \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \to_{|h| \to 0} 0$.

Ovvio se $f \in C_0$ (convergenza dominata). Poi,

$$f_j \in C_0(\mathbf{R}^n), \qquad \int |f - f_j|^p \to 0 \quad \Rightarrow$$

$$\overline{\lim}_{|h| \to 0} (\int |f(x+h) - f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{|h| \to 0} [(\int |f(x+h) - f_j(x+h)|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |f_j(x+h) - f_j(x)|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |f_j(x) - f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq 2(\int |f_j(x) - f(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$$

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE.

Siano $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Allora

$$P(x,y) := f(x-y)\,g(y), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \quad \text{é sommabile e}$$

$$\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x-y)g(y)| \le \int_{\mathbf{R}^n} |f| \ \int_{\mathbf{R}^n} |g|$$

Infatti, se $f, g \in C_0(\mathbf{R}^n)$, allora $P(x,y) := f(x-y)g(y)$ é in $C_0(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ e, per il Teorema di Fubini-Tonelli e l'invarianza per traslazione dell'integrale,

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)g(y)| dL^n(x) \right) dL^n(y) = \int_{\mathbf{R}^n} \left(|g(y)| \int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)| dL^n(x) \right) dL^n(y) =$$

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} |g(y)| dL^n(y) \right) \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)| dL^n(x) \right)$$

Se poi $f_j, g_j \in C_0(\mathbf{R}^n)$, $f_j \to f$, $g_j \to g$ in $L^1(\mathbf{R}^n)$ e quasi ovunque, allora $P_j \to P$ quasi ovunque in $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ e

$$\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |P(x,y)| \le \sup_j \int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |P_j(x,y)| \le \sup_j (\int_{\mathbf{R}^n} |f_j|)(\int_{\mathbf{R}^n} |g_j|) < +\infty$$

Di nuovo Fubini-Tonelli dá $\int_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n} |f(x-y)g(y)| \le \int_{\mathbf{R}^n} |f| \ \int_{\mathbf{R}^n} |g|$.

Definizione di convoluzione $(f * g)(x) := \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy$, $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$

Per quanto visto, $f * g \in L^1(\mathbf{R}^n)$, $\int |f * g| \le \int |f| \int |g|$

Poi $f * g = g * f$ e $f * (\alpha g + \beta h) = \alpha f * g + \beta f * h$

Proposizione. $f \in L^1, g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$

Come sopra, basta mostrarlo per $f, g \in C_0(\mathbf{R}^n)$. Sia $1 < p$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)g(y)| dL^n(y) \right)^p dL^n(x) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |g(y)| dL^n(y) \right)^p dL^n(x) \le$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^p dL^n(y) \right) \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)| dL^n(y) \right)^{\frac{p}{q}} dL^n(x) \le \|f\|_1 \|g\|_p^p \|f\|_1^{\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)g(y)| dL^n(y) \right)^p dL^n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \|g\|_p \|f\|_1^{\frac{1}{q}} = \|f\|_1 \|g\|_p$$

AM5: Esercizi e problemi-VIII Settimana

Problema 1. Sia μ, misura in $\mathbf{R}^n$ definita sulla classe dei Boreliani; μ si dice Borel regolare se per ogni Boreliano B risulta

(i) $\mu(B) = \inf\{\mu(O) : B \subset O, O \text{ aperto}\}$

(ii) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ compatto}\}$

Provare che, se μ é Borel regolare, finita sui compatti e positiva sugli aperti, ed é invariante per traslazione, allora é un multiplo della misura di Lebesgue.

Problema 2 . Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che

(i)f_t è misurabile, $\quad f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}}||f||_p$

Problema 3. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$\int |f(x) - \frac{1}{L^n(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)dy \,|\, dx \ \to_{r\to 0} 0$$

Problema 4. Siano f, g sommabili in $\mathbf{R}^n$. Stabilire se é vero che

f, g pari/dispari $\Rightarrow$ $f * g$ é pari, $\quad f$ pari, g dispari $\Rightarrow$ $f * g$ é dispari

Problema 5. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$. Provare che

(i) $B \subset \mathbf{R}^N$ boreliano di misura nulla $\Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in B\}$ ha misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Usare Fubini..

(ii) $A \subset \mathbf{R}^N$ di misura nulla $\Rightarrow \{(x, y) : \ x-y \in A\}$ ha misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

(iv) A Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \Rightarrow \{(x, y) : \ x-y \in A\}$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Considerare B boreliano in $\mathbf{R}^N$ tale che $A \subset B, L^N(A) = L^N(B)$..

Problema 6 Sia $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile. Provare che $(x,y) :\to f(x-y)$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Scrivere, per $f \geq 0$, $f(x) = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{A_j}, f(x-y) = ...$ *ed usare l'esercizio precedente (nota che* $\chi_A(x-y) = \chi_{\{(x,y):\ x-y\in A\}}$*).*

Problema 7. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$f * \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \Rightarrow f = 0 \; q.o.$$

Problema 8. Siano $\varphi, f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Provare che

$$\exists c > 0 : \quad |\varphi(x)| \leq c \;\; \forall x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \varphi \star f \to_{|x|\to\infty} 0$$

Provare con un esempio che l'ipotesi di limitatezza é essenziale.

Suggerimento . Considerare $\varphi(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}\chi_{[0,1]}, f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \chi_{[n,n+a_n]}$*, con una scelta opportuna di* a_n*,* b_n*.*

Problema 9. Stabilire se é vero che

$$\int_{\mathbf{R}^n} |g| + |f| < \infty, \; \sup_{\mathbf{R}^n} |f| < \infty \Rightarrow \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)g(y)dy \to_{|x|\to+\infty} 0$$

Suggerimento. Considerare dapprima il caso $g \in C_0$

Esercizio 1. Siano $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\chi_{[-1,1]}$, $g(x) = \sum_n n^\alpha \chi_{[n,n+\frac{1}{n^\beta}]}$. Stabilire se , per $\beta > \alpha + 1$, $f * g$ é limitata

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Posto $f_n = f\,\chi_{\{|f(x)|\leq n\}}$, provare che

$$\int |g| < +\infty \Rightarrow \int |f_n * g - f * g| \to_n 0$$

Esercizio 3. Sia $f(x) = \sqrt{\frac{1}{|x|(1+\log^2|x|)}}, x \in \mathbf{R}$. Provare che

(i) $f \in L^p$ se e solo se $p = 2$

(ii) $f \star \chi_{[-1,1]} \in L^p$ se e solo se $p \geq 2$.