AM2: Tracce delle lezioni- VIII Settimana

FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

Una funzione reale di due (od n) variabili reali é una funzione definita in un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (rispettivamente, di $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$) e a valori in $\mathbf{R}$. Ad esempio, $f(x,y) = ax + by$ (funzione lineare).

In $\mathbf{R}^2$, prodotto cartesiano $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ (insieme delle coppie ordinate di numeri reali, o vettori $v = (x,y)$), son definite una struttura algebrica ed una struttura metrica:

STRUTTURA ALGEBRICA in $\mathbf{R}^2$:
Se $v_1 = (x_1, y_1),\ v_2 = (x_2, y_2), \qquad v_1 + v_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (**addizione**)
Se $t \in \mathbf{R}$, é $t(x,y) := (tx, ty)$, $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$ (**moltiplicazione per uno scalare**).

STRUTTURA METRICA in $\mathbf{R}^2$:
Se $v = (x,y), \quad ||v|| := \sqrt{x^2 + y^2}$ (**norma** di u)
Se $v_1 = (x_1, y_1),\ v_2 = (x_2, y_2)$, é $d(v_1, v_2) := ||v_1 - v_2||$ (**distanza** tra v_1, v_2.)

COMMENTI.
Come noto, $\mathbf{R}^2$ si rappresenta mediante i punti di un piano cartesiano Oxy. In tale piano, dato un vettore u, l'insieme $\mathbf{R}\,v := \{tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ é l'insieme dei punti della retta uscente dall'origine $O := (0,0)$ e passante per v. Piú in generale, $\{tu + v : \ t \in \mathbf{R}\}$ é la (rappresentazione parametrica della) retta passante per v e parallela alla retta $\mathbf{R}\,u$. In particolare, $u + v$ é il punto comune alle rette $\{tu + v : \ t \in \mathbf{R}\}$ e $\{u + tv : \ t \in \mathbf{R}\}$ e si chiama traslazione di u lungo v.
$||(x,y)|| := \sqrt{x^2 + y^2}$ é la lunghezza del segmento che unisce il punto $u = (x,y)$ all'origine (o lunghezza del vettore u), e $d(u,v)$ é la distanza tra i punti u e v.

La funzione distanza soddisfa le proprietá

(i) $\quad 0 \le d(u,v), \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^2 \qquad d(u,v) = 0 \ \Leftrightarrow \ u = v$ (**positivitá**)
(ii) $\quad d(u,v) = d(v,u) \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^2$ (**simmetria**)
(iii) $\quad d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v) \quad \forall u, v, w \in \mathbf{R}^2$ (**diseguaglianza triangolare**)

Relazioni (di compatibilitá) tra struttura algebrica e struttura metrica :

(i) $\quad ||tu|| = |t|\,||u|| \quad \forall u \in \mathbf{R}^2,\ t \in \mathbf{R}$ (**omogeneitá**)
(ii) $\quad ||u + v|| \le ||u|| + ||v|| \quad \forall u, v \in \mathbf{R}^2$ (**diseguaglianza triangolare**).

NOTAZIONE. $D := \{u : \ ||u|| < 1\}$, e, se $r > 0$, $v \in \mathbf{R}^2$:

$D_r := rD := \{ru : u \in D\} = \{u : ||u|| < r\}$, $D_r(v) := D_r + v := \{u + v : u \in D_r\}$

si chiamano disco di raggio r centrato in zero, e, rispettivamente, disco di raggio r centrato in v.

SUCCESSIONI CONVERGENTI in $\mathbf{R}^2$ $\quad u_n \to u \quad \Leftrightarrow \quad ||u_n - u|| \to 0.$

NOTA. (i) Se $u_n = (x_n, y_n)$, $u = (x, y)$, allora $u_n \to u \Leftrightarrow x_n \to x$, $y_n \to y$.
Infatti $\quad ||u_n - u||^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2$

(ii) $\quad u_n$ converge $\Rightarrow \sup_n ||u_n|| < +\infty$

DEFINIZIONE (insiemi limitati, aperti, chiusi, compatti)

(i) $B \subset \mathbf{R}^2$ é **limitato** se esiste $r > 0 : \ B \subset D_r$

(ii) $O \subset \mathbf{R}^2$ é **aperto** se $\forall u \in O \ \exists r > 0 : \ D_r(u) \subset O$

(ii) $F \subset \mathbf{R}^2$ é **chiuso** se F' é aperto

(iii) $K \subset \mathbf{R}^2$ é **compatto** se é chiuso e limitato

PROPOSIZIONE 1

(i) $F \subset \mathbf{R}^2$ é **chiuso** $\quad \Leftrightarrow \quad (u_n \in F,\ u_n \to u \quad \Rightarrow \quad u \in F)$

(ii) $K \subset \mathbf{R}^2$ é **compatto** $\quad \Leftrightarrow \quad (u_n \in K \quad \Rightarrow \quad \exists\, u_{n_k}, u \in K : \ u_{n_k} \to u)$.

Prova. (i) $\Rightarrow$: $u \notin F \Rightarrow \exists r > 0 : \ D_r(u) \subset F'$ mentre $u_n \in F \cap D_r(u)$ definitivamente. $\Leftarrow$: Se $u \notin F$, deve esistere $r > 0 : \ D_r(u) \subset F'$, altrimenti $\forall n$, $\exists\ u_n \in D_{\frac{1}{n}}(u) \cap F$. Ma $u_n \in F \cap D_{\frac{1}{n}}(u) \Rightarrow u_n \to u \Rightarrow u \in F$.

(ii) $\Rightarrow$: $u_n = (x_n, y_n) \in K \Rightarrow x_n, y_n$ sono limitate e quindi esiste n_k tale che x_{n_k}, y_{n_k} convergono, diciamo a x, y e quindi u_{n_k} converge a $u = (x, y) \in K$ perché K é chiuso. $\Leftarrow$: Se K é non limitato, esiste $u_n \in K$ con $||u_n|| \to +\infty$. Per ogni estratta u_{n_k} é ugualmente vero che $||u_{n_k}|| \to_k +\infty$ e quindi u_{n_k} non puó convergere (sarebbe limitata !). Se K non é chiuso, esiste $u \notin K$ e $u_n \in K$ con $u_n \to u$ e quindi u_n non ha sottosuccessioni convergenti in K.

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f : A \to \mathbf{R}, A \subset \mathbf{R}^2$, $\dot{D}_r(u) = D_r(u)\backslash\{u\}$.

Sia u_0 tale che $\dot{D}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow f(u) \geq M)$$

Se $D'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = l \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \ \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0 : \ u \in A, \ ||u|| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \leq \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = +\infty \Leftrightarrow (\forall M > 0, \ \exists R_M > 0 : \ u \in A, \ ||u|| \geq R_M \Rightarrow f(u) \geq M)$$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che

(i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\Leftrightarrow$

$$(u_n \in A, \ u_n \neq u_0, \ u_n \to u_0 \ (|u_n| \to +\infty\,) \Rightarrow f(u_n) \to l)$$

(ii) (**Cauchy**) f ha limite l per u tendente a u_0 $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u, v \in A \cap \dot{D}_{\delta_\epsilon}(u_0) \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\Leftrightarrow$

$$(\forall \epsilon > 0, \ \exists R_\epsilon > 0 : \ u, v \in A, \ |u|, |v| \geq R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq \epsilon)$$

DUE ESEMPI . **(i)** Sia $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \ \forall u_0 \neq 0$. Invece,

$\lim_{u \to 0} f(u)$ e $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esistono: $f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \neq 0$. Come sopra, $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \ \forall u_0 \neq 0$. Ed é anche $\lim_{u \to 0} f(u) = 0$: $|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

alternativamente, in coordinate polari: $|f(r\cos t, r \sin t)| = r \cos^2 t |\sin t| \leq r$.

Infine, $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esiste: $f(x, tx) = \frac{tx^3}{x^2(1+t^2)} \to_{t \to \infty} 0$

mentre $f(tx, x) = \frac{t^2 x^3}{x^2(1+t^2)} \to_{t \to \infty} x$.

DEFINIZIONE (continuitá) Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^2$, $u_0 \in A$.

f é continua in u_0 se $\lim_{u \to u_0} f$ esiste e $\lim_{u \to u_0} f = f(u_0)$.

f é continua in A se é continua in ogni punto di A.

$C(A)$ indicherá la classe delle funzioni continue in A.

TEOREMA DI WEIERSTRASS Sia $f \in C(K)$, $K \subset \mathbf{R}^2$ compatto.

Allora, $\exists \quad \underline{u}, \quad \overline{u} \in K : \; -\infty < \inf_K f = f(\underline{u}), \quad f(\overline{u}) = \sup_K f < +\infty$

Prova. Sia $u_n \in K : f(u_n) \to_n \sup_K f$. Possiamo supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che $u_n \to u$ per un $u \in K$. Da $f(u_n) \to f(u)$ segue che $\sup_K f = f(u) < +\infty$.

UNIFORME CONTINUITÁ f é **uniformemente continua** in A sse

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad (u, v \in K, \; ||u - v|| \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(v)| \le \epsilon)$$

(**Heine-Cantor**) $f \in C(K)$, $K \subset \mathbf{R}^2$ compatto $\Rightarrow$ f é uniformemente continua in K.

Prova. Se no, $\exists\, \epsilon_0 > 0$, $u_n, v_n \in K$, $||u_n - v_n|| \le \frac{1}{n}$: $|f(u_n) - f(v_n)| \ge \epsilon_0$. Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che $u_n \to u$, $v_n \to v$ per certi $u, v \in K$. Per continuitá: $|f(u) - f(v)| \ge \epsilon_0$. Ma $||u - v|| \le ||u - u_n|| + ||u_n - v_n|| + ||v_n - v|| \quad \forall n \;\Rightarrow\; u = v$, contraddizione.

CONNESSIONE $A \subset \mathbf{R}^2$ é **connesso per archi** se $\forall\, u, v \in A$, esiste un **cammino continuo** $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $x, y \in C([0,1])$:

$$\gamma(t) \in A \;\; \forall t \in [0,1], \;\; \gamma(0) = (x(0), y(0)) = u, \;\; \gamma(1) = (x(1), y(1)) = v$$

Teorema del valore intermedio. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$ connesso per archi. Allora

$f \in C(A) \quad \Rightarrow \quad f(A)$ é un intervallo.

Prova. Sia $a = f(u)$, $b = f(v)$, $u, v \in A$. Siano $x, y \in C([0,1])$: $\gamma(t) := (x(t), y(t)) \in A \quad \forall t \in [0,1]$, $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$. Siccome $t \to f(\gamma(t))$ é continua in $[0,1]$ si ha $[a, b] \subset f \circ \gamma([0,1])$ (teorema del valore intermedio per funzioni di una variabile!).

ESEMPI E COMPLEMENTI

1. Siano O_α, F_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ famiglie di aperti, chiusi. Allora

$$\bigcup_\alpha O_\alpha \quad \text{é aperto,} \qquad \bigcap_\alpha F_\alpha \quad \text{é chiuso.}$$

Infatti, $u \in \bigcup_\alpha O_\alpha \;\Rightarrow\; \exists \alpha : u \in O_\alpha \;\Rightarrow\; \exists\; D_r(u) \subset O_\alpha \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$.
Poi, $(\bigcap_\alpha F_\alpha)' = \bigcup_\alpha F'_\alpha$.

2. $\overline{A} := \bigcap_{F:\ A\subset F,\, F \text{ chiuso}} F$, il piú piccolo chiuso contenente A, si chiama **chiusura** di A. Chiaramente, F é chiuso $\Leftrightarrow F = \overline{F}$.

3. $u \in \overline{A} \;\Leftrightarrow\; \exists u_n \in A : u_n \to u$. Infatti, $u \in \overline{A} \;\Rightarrow\; D_r(u) \cap A \neq \emptyset$ $\forall r > 0$, altrimenti $\exists r > 0 :\ A \subset D'_r$ e quindi $u \in \overline{A} \subset D'_r$, contraddizione. Da $D_{\frac{1}{n}}(u) \cap A \neq \emptyset\ \forall n$, segue che esiste $u_n \in A :\ u_n \to u$. Il viceversa é ovvio.

4. $int\, A := \{u \in A :\ \exists D_r(u) \subset A\}$, $\partial A := \overline{A} \setminus int\, A$. Provare che

$$\partial A = \{u :\ D_r(u) \cap A \neq \emptyset \neq D_r(u) \cap A' \ \forall r > 0\}$$

Sia $u \in \partial A$. $\forall r > 0, D_r \cap A' \neq \emptyset$ perché u non é interno e $D_r \cap A \neq \emptyset$ perché $u \in \overline{A}$. Viceversa, $D_r \cap A' \neq \emptyset \forall r > 0 \Rightarrow u$ non é interno e $D_r \cap A \neq \emptyset \forall r > 0 \Rightarrow u \in \overline{A}$.

5. Sia O aperto. Siano $x, y \in C([0,1])$ tali che $(x(0), y(0)) \in O$, $(x(1), y(1)) \in \overline{O}'$.
Provare che $\exists t \in [0,1] :\ (x(t), y(t)) \in \partial O$.

$f(x,y) \equiv 1$ in O, $f(x,y) \equiv 0$ in O' é continua in $O \cup \overline{O}'$ e quindi, se fosse $\gamma(t) := (x(t), y(t)) \in O \cup \overline{O}'$ $\forall t \in [0,1]$, sarebbe $[0,1] \subset (f \circ \gamma)([0,1])$.

6. Esercizio Sia $0 \le \varphi \in C_0^\infty((-1,1))$, $\varphi(0) = 1$ e $f(x,y) = \varphi(\frac{2xy}{x^2+y^2-2x})$ se $x^2 + y^2 - 2x \neq 0$. Si ha:

(i) $\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)\ \forall\ u_0 := (x_0, y_0)$ con $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 \neq 0$
(ii) $\lim_{u\to u_0} f(u) = 0\ \forall\ u_0 := (x_0, y_0)$ con $x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 = 0, u_0 \neq 0,\ u_0 \neq (2,0)$
(iii) $\lim_{u\to u_0} f(u)$ non esiste, se u_0 é $(0,0)$ oppure $u_0 = (2,0)$.

(i): $(x_n, y_n) \to_n (x_0, y_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{2x_n y_n}{x_n^2+y_n^2-2x_n} \to_n \frac{2x_0 y_0}{x_0^2+y_0^2-2x_0}$.

(ii): $|x^2 + y^2 - 2x| \le |x_0 y_0|$ e $|2xy| \ge |x_0 y_0|$ se $|(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2| << 1$ e quindi $|\frac{2xy}{x^2+y^2-2x}| \ge 1$ e quindi $f(x,y) \equiv 0$ in un piccolo disco attorno a u_0.

(iii) $f(x,0)=\varphi(0)=1$ se $x\neq 0, x\neq 2$. Ma, siccome $x^2+y^2=r^2$, r interseca, se $r<2$, $\{(x,y): x^2+y^2-2x=0\}$ (circonferenza di raggio 1 centrata in $(1,0)$) f vale 0 nei punti di $x^2+y^2=r^2$, r vicini a tale intersezione: f prende i valori 1 e 0 in punti arbitrariamente vicini a $(0,0)$ e quindi non ha limite in $(0,0)$. Analogamente in $(2,0)$.

7. Sia $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\sup_{x\in\mathbf{R}}|\varphi|>0$, $f(x,y):=\varphi(\frac{\arctan\frac{y}{x}}{\sqrt{x^2+y^2}})$ se $x\neq 0$, $f(0,y)=\varphi(\frac{\pi}{2y})$ se $y\neq 0$, $f(0,0)=0$. Si ha:

$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$ se $u_0\neq 0$ mentre $\lim\limits_{u\to 0} f(u)$ non esiste. Infatti $f(x,mx)=\varphi(\frac{|\arctan m|}{|x|(1+m^2)})\to 0$ al tendere di x a zero, mentre, per r piccolo

$x=r\cos t, y=r\sin t,\quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\quad\Rightarrow\quad \sup\limits_{x^2+y^2=r^2}|f(x,y)|=\sup\limits_{t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\varphi(\frac{t}{r})=$ $\sup_{\mathbf{R}}|\varphi|>0$.

8. Problema Sia $f: D_r\to\mathbf{R}$ tale che $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$, $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ esistano entrambi. Sono tali limiti necessariamente uguali? In caso negativo, l'essere uguali comporta che esiste $\lim\limits_{u\to 0} f(u)$?

Risposta: in generale no. Ad esempio, se $f(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\neq 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$, $\forall y\neq 0$ mentre $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$ $\forall y\neq 0$. Ugualmente, il fatto che siano uguali non comporta l'esistenza di $\lim f$ in zero, é ad esempio il caso di $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$

9 Continuitá. Se f é continua in A, allora le funzioni di una variabile

$$x\to f(x,y),\quad \{x:\ (x,y)\in A\},\qquad y\to f(x,y),\quad \{y:\ (x,y)\in A\}$$

(dipendenti dal parametro y, rispettivamente x), sono continue .

Una funzione f avente tale proprietá si dice **separatamente continua** in x ed y.

É in generale falso che una funzione, continua separatamente in x, y, risulti continua 'nel complesso delle variabili'. Ad esempio, se $\varphi\in C_0(\mathbf{R})$, $\varphi(1)=10$ e $f(x,y)=\varphi(\frac{x^2}{y})\frac{1}{y}$ se $y\neq 0$, $f(x,0)=0$ $\forall x$, f é continua in ogni punto diverso da $(0,0)$ e separatamente continua in x e y anche in $(0,0)$, ma non é continua in $(0,0)$: $f(x,x^2)=\frac{\varphi(1)}{x^2}\to_{x\to 0}+\infty$. In particolare, $\sup\limits_{x^2+y^2\leq r} f=+\infty$ cosa che non puó accadere se f é continua (od anche solo se ha un limite finito) in zero.