AM2: Lavoro individuale 3

Serie di funzioni

Studiare la convergenza puntuale delle seguenti serie:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{-\log n}$ per $x > 0$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{x}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{x}\right)^n \right]$ per $x \in \mathbb{R}$

Determinare l'insieme di convergenza puntuale delle seguenti serie, e stabilire se la convergenza è totale:

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{n^3 x + n^2}$

Serie di potenze

Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze ed, eventualmente, studiarne il comportamento al bordo:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^7}{(n+1)!} x^n$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2^n} x^n$

Soluzioni

Serie di funzioni

1. Riscriviamo il termine generico della serie come

$$x^{-\log n} = e^{-\log n \log x} = n^{-\log x}$$

   A questo punto è facile vedere che la serie converge puntualmente se $\log x > 1$ ossia se $x > e$.

2. La serie data è somma delle due serie

$$S_1(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$
$$S_2(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

   $S_1(x)$ e $S_2(x)$ sono serie geometriche di ragione $x/2$ e $1/x$ rispettivamente. Dunque $S_1(x)$ converge se $|x/2| < 1$, ossia se $|x| < 2$, mentre $S_2(x)$ converge se $|x| > 1$. Pertanto la serie data converge se $1 < |x| < 2$.

3. La serie data converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$. Basta osservare che

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$$

   e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

4. Osserviamo che se $x < 0$ il termine generale della serie non è infinitesimo, quindi non si può avere convergenza puntuale. Per $x = 0$ la serie è identicamente nulla. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{xe^{-(n+1)x}}{xe^{-nx}} = e^{-x} < 1$$

   per ogni $x > 0$, dunque la serie converge puntualmente. La derivata di xe^{-nx} si annulla per $x = 1/n$ (punto di massimo) e

$$\max_{x\geq 0} xe^{-nx} = \frac{1}{n}e^{-1}$$

   Dunque la serie non può convergere totalmente in $[0, +\infty)$. Si ha però convergenza totale in $[1, +\infty)$ poiché in tale intervallo

$$\max xe^{-nx} = e^{-n}$$

   e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ converge essendo una serie geometrica di ragione minore di 1.

5. Si deve avere per ogni $n \in \mathbb{N}$ (affinché il logaritmo sia ben definito)

$$1 + nx > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$$

Dalla disuguaglianza $\log(1+y) \leq y$, valida per ogni $y > -1$, abbiamo

$$\frac{\log(1+nx)}{n^3x+n^2} \leq \frac{nx}{n^3x+n^2} = \frac{x}{n^2x+n} \leq \frac{x}{n^2x} = \frac{1}{n^2}$$

Dunque in tutto l'intervallo $[0,+\infty)$ si ha convergenza totale.

Serie di potenze

1. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$$

da cui $\varrho = 0$. Dunque la serie converge solo per $x = 0$.

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{(n+2)2^{n+1}} = 1/2$$

da cui $\varrho = 2$. Inoltre per $x = 2$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$$

che diverge, mentre per $x = -2$ otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

che converge per Leibniz.

3.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = 0$$

da cui $\varrho = \infty$.

4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^7}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n^7} = 0$$

da cui $\varrho = \infty$.

5.
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5n}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

da cui $\varrho = 2$. In $x = \pm 2$ non c'è convergenza poiché la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n 5n$$

il cui termine generale non è infinitesimo.