

# AM3 - Tutorato IV

## Logaritmi e serie di potenze nel campo complesso

Venerdì 18 novembre 2004

**Esercizio 1.** Per quali valori di  $z$  si ha che  $e^z = 2, -1, i, -\frac{i}{2}, -i-2, 1+2i$ ?

**Esercizio 2.** Trovare tutti i valori di  $2^i, i^i, (-1)^{2i}, (-1)^{\sqrt{2}}$ .

**Esercizio 3.** Trovare la parte reale ed immaginaria di  $\exp(e^z)$ .

**Esercizio 4.** Esprimere in termini del logaritmo complesso la funzione di variabile complessa  $\arctan w$

**Esercizio 5.** Dimostrare che:

$$\pi < 2\sqrt{3}$$

ed utilizzare questo risultato per mostrare che il resto nelle serie delle funzioni  $\cos z$  e  $\sin z$  ha lo stesso segno del suo termine principale (il primo termine del resto). Dedurre infine che:

$$\pi > 3$$

**Esercizio 6.** Considerare la funzione

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

e discutere in che modo essa agisce sulle rette parallele agli assi coordinati del piano complesso. Determinare inoltre le immagini delle regioni

$$A = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) < 0, 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\}$$

**Esercizio 7.** Supponiamo di trovarci nel piano complesso in 1 e di intraprendere una singolare passeggiata; muoviamoci di una unità di lunghezza verso l'alto, poi svoltiamo a sinistra e procediamo per mezza unità di lunghezza, poi sempre girando verso sinistra percorriamo  $\frac{1}{3}$  dello spostamento precedente poi  $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$  e così via... dove arriviamo?