Esercitazione n°5

1 Limiti e continuità di funzioni in più variabili

Esercizio 1: Si verifichi che la funzione f definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

è continua in $(0, 0)$ come funzione di due variabili.

Sol.: Osserviamo che per $(x, y) \neq (0, 0)$ si ha

$$\frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = x^2 - y^2$$

e che

$$|x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2 \underset{|(x,y)| \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Esercizio 2: Si consideri la funzione f definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si verifichi la continuità di f in $(0, 0)$ come funzione di due variabili.

Sol.: Basta verificare che esiste

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4}{x^2 + y^2}$$

e che tale limite vale 0. Infatti

$$0 \leq \frac{x^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = x^2 \leq x^2 + y^2 = |(x, y)|^2$$

Dunque se $|(x, y)| \to 0$ anche la funzione converge a 0 come voluto.

Esercizio 3: Si consideri la funzione f definita per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Si verifchi che f è continua separatamente nelle due variabili x e y, ma non è continua in $(0,0)$ come funzione di due variabili.

Sol.: Considerare la funzione f separatamente nelle due variabili vuol dire studiarne il comportamento sulle rette $y = y_0$ e $x = x_0$ dove x_0 e y_0 sono valori fissati.

Nel primo caso si ha
$$g(x) = f(x, y_0) = \frac{xy_0}{x^2 + y_0^2}$$
la quale è continua se $y_0 \neq 0$ in quanto rapporto di due polinomi con denominatore non nullo, ed è identicamente nulla per $y_0 = 0$. Abbiamo quindi la continuità nella variabile x.

Nel secondo caso
$$h(y) = f(x_0, y) = \frac{x_0 y}{x_0^2 + y^2}$$
e con un ragionamento del tutto analogo al precedente si mostra la continuità anche nella variabile y.

Mostriamo ora però che non esiste
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$
Infatti, se consideriamo le rette $y = mx$ abbiamo
$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$
Se dunque esistesse il limite cercato si dovrebbe avere
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{m}{1+m^2} \quad \forall\, m \in \mathbb{R}$$
Assurdo.

Nota: si osservi che una volta mostrata la continuità rispetto ad una delle due variabili, si ottiene anche la continuità nell'altra variabile in quanto f è una funzione simmetrica in x e y.

Esercizio 4: Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$
Si verifchi che esiste il limite per $t \to 0$ di f su tutte le rette di equazione parametrica $x = lt$, $y = mt$ ed il valore di tale limite è indipendente da l e m. Si mostri che tuttavia non esiste il limite di f per (x,y) tendente a $(0,0)$.

Sol.: Sulle rette di equazione $x = lt$, $y = mt$ si ha
$$f(lt, mt) = \frac{l^2 m t^3}{(l^4t^2 + m^2)t^2} = t\frac{l^2 m}{l^4 t^2 + m^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$
Consideriamo però ora le curve di equazione $y = mx^2$:
$$f(x, mx^2) = \frac{mx^4}{(1+m^2)x^4} = \frac{m}{1+m^2}$$

Dunque il limite per x tendente a 0 di f su tali curve dipende dal parametro m della curva scelta. Non può quindi esistere

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Esercizio 5: Estendere con continuità (dove possibile) su tutto $\mathbb{R}^2$ le seguenti funzioni:

$$(a) f(x,y) = \tfrac{\sin(2x-2y)}{x-y} \qquad (b) f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$$

Sol.: (a): la funzione è definita al di fuori della retta $y = x$. Poniamo $t = x - y$. Ricordando che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin 2t}{t} = 2$$

possiamo estendere f con continuità sulla retta $y = x$ ponendo $f(x,x) = 2$.

(b): f non è definita soltanto nell'origine. Abbiamo

$$|xy\log(x^2+y^2)| = |xy||\log(x^2+y^2)| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$$

e l'ultimo membro delle disuguaglianze converge a 0 nell'origine. Quindi la funzione data può essere estesa ponendo $f(0,0) = 0$.

2 Derivate parziali e differenziabilità

Definizione 2.1 *Una funzione f definita in un intorno di un punto di coordinate (x,y) ammette derivate parziali in tale punto se esistono finiti i due limiti*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad e \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Tali limiti si diranno in tal caso rispettivamente **derivata parziale rispetto a** x *e* **derivata parziale rispetto a** y *della funzione f nel punto (x,y).*

Per il seguito indicheremo le derivate parziali di una funzione f rispetto ad una variabile con il simbolo f indicizzato dalla variabile rispetto a cui si deriva (ad esempio, la derivata parziale di $f(x,y)$ rispetto alla variabile x sarà indicata con f_x). Analogamente, le derivate parziali seconde saranno indicizzate dalle variabili rispetto a cui si deriva nell'ordine di derivazione (f_{xy} indicherà la derivata di f_x rispetto ad y).

Esercizio 6: Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni nei punti interni ai loro insiemi di definizione:

$$(a) f(x,y) = \tfrac{x-y}{x+y} \qquad (b) f(x,y) = \sqrt{1+x^2}$$
$$(c) f(x,y) = xy\log(x^2+y^2) \qquad (d) f(x,y) = \sin(xy)$$

Sol.: (a): deriviamo prima rispetto a x e poi rispetto a y

$$f_x = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2}$$

$$f_y = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{-2x}{(x+y)^2}.$$

(b):

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Poiché nell'espressione di f non compare la variabile y

$$f_y = 0$$

(c):

$$f_x = y\log(x^2+y^2) + xy\,\frac{2x}{x^2+y^2}$$

Poiché f è simmetrica nelle due variabili f_y ha la stessa espressione di f_x (in cui scambi il ruolo di x ed y). Dunque

$$f_y = x\log(x^2+y^2) + xy\,\frac{2y}{x^2+y^2}$$

(d): anche in questo caso una volta determinata f_x l'altra derivata parziale si ottiene per simmetria:

$$f_x = y\cos(xy)$$

$$f_y = x\cos(xy)$$

Esercizio 7: Verificare che la funzione $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ non ammette derivate parziali nel punto $(0,0)$.

Sol.: Basta verificare che sugli assi coordinati la funzione non è derivabile. Infatti se $y=0$ abbiamo

$$f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$$

che non ammette derivata per $x=0$. Per simmetria se $x=0$

$$f(0,y) = |y|$$

da cui segue che non esistono f_x né f_y nell'origine.

Definizione 2.2 *Siano x,$h \in \mathbb{R}^n$. Una funzione f è* **differenziabile** *nel punto x se esiste una funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to R$ tale che*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-L(h)}{|h|} = 0.$$

Il funzionale L si dice allora **differenziale** *di f e si ha*

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x)h_i.$$

Esercizio 8: Verificare che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua ma non differenziabile nell'origine.

Sol.: Si ha

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

da cui segue la continuità in $(0,0)$.

Calcoliamo le derivate parziali prime di f:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

ed analogamente

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

Tuttavia

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2}$$

e tale limite non esiste (si veda l'esercizio 3). Dunque f non è differenziabile nell'origine.

Esercizio 9: Verificare che la funzione

$$f(x,y) = |xy|^\alpha$$

($\alpha > 0$) è differenziabile nell'origine se e solo se $\alpha > 1/2$.

Sol.: Poiché la funzione è identicamente nulla su entrambi gli assi coordinati abbiamo $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. La condizione di differenziabilità diventa quindi

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|hk|^\alpha}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Si tratta quindi di studiare la funzione di due variabili

$$g(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Guardiamo cosa avviene sulle rette $y = mx$:

$$g(x,mx) = |x|^{2\alpha-1}\frac{|m|^\alpha}{1+m^2}$$

Se $\alpha < 1/2$ abbiamo

$$\lim_{x\to 0} g(x,mx) = +\infty$$

indipendentemente dal valore di m. Per $\alpha = 1/2$ il limite cercato non esiste. Osserviamo inoltre che
$$|t|^\alpha = (\sqrt{t^2})^\alpha \leq (\sqrt{t^2+u^2})^\alpha = (t^2+u^2)^{\alpha/2}$$
per ogni $t, u \in \mathbb{R}$. Dunque per $\alpha > 1/2$ abbiamo
$$|g(x,y)| = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{(x^2+y^2)^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} = (x^2+y^2)^{\alpha-1/2}$$
che converge a 0 quando $(x,y) \to (0,0)$. Ne segue la differenziabilità di f per $\alpha > 1/2$ come voluto.

Esercizio 10: Stabilire se in $(0,0)$ risulta continua, derivabile o differenziabile la funzione definita da $f(0,0) = 0$ e, per $(x,y) \neq (0,0)$, da:
$$f(x,y) = \frac{1-\cos xy}{x^4+y^4}$$

Sol.: Calcoliamo f sulle rette $y = mx$
$$f(x,mx) = \frac{1-\cos mx^2}{(1+m^4)x^4} = \frac{1-\cos mx^2}{m^2x^4}\frac{m^2}{1+m^4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\frac{m^2}{1+m^4}$$
Pertanto f non è continua né differenziabile in $(0,0)$. Però è derivabile: f è identicamente nulla sugli assi coordinati dunque
$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

3 Altri esercizi svolti

Esercizio 11: Estendere con continuità (dove possibile) su tutto $\mathbb{R}^2$ le seguenti funzioni:
$$(a) f(x,y) = \tfrac{xy}{|xy|} \qquad (b) f(x,y) = \tfrac{e^{x+y}-1}{3x+3y}$$

Sol.: (a): f è definita al di fuori degli assi coordinati. In questo caso però osserviamo che sull'iperbole $xy = 1$ (come su tutte le iperboli $xy = t$ con $t > 0$) la funzione vale identicamente 1, mentre sulle iperboli $xy = t$ con $t < 0$ la funzione vale -1. Non esiste quindi il limite di f sugli assi coordinati e la funzione non si estende.

(b): f non è definita sulla retta $x + y = 0$. Ponendo $x + y = t$ abbiamo
$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{3t} = \frac{1}{3}$$
e dunque la funzione si estende ponendo $f(x,-x) = \frac{1}{3}$.

Esercizio 12: Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni nei punti interni ai loro insiemi di definizione:
$$(a) f(x,y) = 2^{\frac{y}{x}} \qquad (b) f(x,y) = y^{\log x}$$
$$(c) f(x,y) = \left(1+\tfrac{1}{x}\right)^y \qquad (d) f(x,y) = x^{x^y}$$

Sol.: (a): abbiamo
$$2^{\frac{y}{x}} = e^{\frac{y}{x}\log 2}$$
da cui
$$f_x = -e^{\frac{y}{x}\log 2}\log 2\,\frac{y}{x^2} = -2^{\frac{y}{x}}\log 2\,\frac{y}{x^2}$$
$$f_y = e^{\frac{y}{x}\log 2}\log 2\,\frac{1}{x} = 2^{\frac{y}{x}}\log 2\,\frac{1}{x}$$
(b): scriviamo f come
$$y^{\log x} = e^{\log x \log y}$$
Calcoliamo f_x
$$f_x = e^{\log x \log y}\frac{1}{x}\,\log y = y^{\log x}\frac{1}{x}\,\log y$$
e per simmetria
$$f_y = e^{\log x \log y}\frac{1}{y}\,\log x = y^{\log x}\frac{1}{y}\,\log x$$
(c): $f(x,y) = (1+\frac{1}{x})^y = e^{y\log(1+\frac{1}{x})}$ da cui
$$f_x = -e^{y\log(1+\frac{1}{x})}y\,\frac{1}{(1+\frac{1}{x})}\frac{1}{x^2} = -(1+\frac{1}{x})^{y-1}\,\frac{y}{x^2}$$
mentre
$$f_y = e^{y\log(1+\frac{1}{x})}\log(1+\frac{1}{x}) = (1+\frac{1}{x})^y\log(1+\frac{1}{x})$$
(d): abbiamo $x^{x^y} = e^{x^y\log x} = e^{e^{y\log x}\log x}$. Ne segue
$$f_x = e^{e^{y\log x}\log x}\left(e^{y\log x}\frac{y}{x}\,\log x + e^{y\log x}\frac{1}{x}\right) = x^{x^y}x^y\frac{y\log x+1}{x} = x^{x^y}x^{y-1}(y\log x+1)$$
mentre per f_y si ottiene
$$f_y = e^{e^{y\log x}\log x}e^{y\log x}\log^2 x = x^{x^y}x^y(\log x)^2$$

Esercizio 13: Calcolare le derivate seconde delle seguenti funzioni nei punti interni ai loro insiemi di definizione e verificare che le derivate seconde miste sono uguali tra loro:
$$(a) f(x,y) = \tfrac{x-y}{x+y} \qquad (b) f(x,y) = \sqrt{1+x^2}$$
$$(c) f(x,y) = xy\log(x^2+y^2) \qquad (d) f(x,y) = \sin(xy)$$

Sol.: Abbiamo già calcolato nell'esercizio 6 le derivate parziali prime di queste funzioni. Si tratta quindi di derivare ancora rispetto alle due variabili.

(a): abbiamo $f_x = \frac{2y}{(x+y)^2}$, $f_y = -\frac{2x}{(x+y)^2}$ da cui
$$f_{xx} = -\frac{4y}{(x+y)^3} \qquad f_{xy} = \frac{2(x+y)^2 - 4y(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$$

$$f_{yx} = -\frac{2(x+y)^2 - 4x(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} \qquad f_{yy} = \frac{4x}{(x+y)^3}$$

(b): da $f_x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_y = 0$ otteniamo

$$f_{xx} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3} \qquad f_{xy} = 0$$

$$f_{yx} = f_{yy} = 0$$

(c): le derivate prime sono $f_x = y\log(x^2+y^2) + xy\,\frac{2x}{x^2+y^2}$, $f_y = x\log(x^2+y^2) + xy\,\frac{2y}{x^2+y^2}$. Ne segue

$$f_{xx} = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Per calcolare f_{xy} riscriviamo f_x nella forma seguente:

$$f_x = y\left(\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)$$

Dunque

$$\begin{aligned}
f_{xy} &= \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + y\left(\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = \\
&= \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + y\left(\frac{2y(x^2+y^2) - 4x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right) = \\
&= \log(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + 2y^2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \\
&= \log(x^2+y^2) + 2\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Analogamente riscriviamo l'espressione di f_y:

$$f_y = x\left(\log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right)$$

Con gli stessi passaggi di prima otteniamo

$$\begin{aligned}
f_{yx} &= \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + x\left(\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \\
&= \log(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + 2x^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \\
&= \log(x^2+y^2) + 2\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

mentre per l'ultima derivata

$$f_{yy} = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

(d): abbiamo $f_x = y\cos(xy)$, $f_y = x\cos(xy)$ da cui

$$f_{xx} = -y^2\sin(xy) \qquad f_{xy} = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$f_{yx} = \cos(xy) - xy\sin(xy) \qquad f_{yy} = x^2\sin(xy)$$

Esercizio 14: Verificare che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ammette derivate seconde miste distinte nell'origine.

Sol.: Verifichiamo che f è continua nell'origine:

$$\left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| \leq x^2\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0.$$

Abbiamo

$$f_x = \frac{3x^2y(x^2+y^2) - 2x^4y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

mentre

$$f_y = \frac{x^3(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

per ogni $(x,y) \neq (0,0)$. Sia f_x che f_y convergono a 0 nell'origine:

$$|f_x| = \left|\frac{x^4y + 3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| = |x^2y|\left|\frac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \frac{3}{2}|x|$$

$$|f_y| = \left|\frac{x^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| = |x^3|\left|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq |x|$$

D'altra parte

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

quindi anche le derivate parziali prime sono continue.

Calcoliamo allora le derivate parziali seconde miste nell'origine:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1 \neq 0$$

Esercizio 15: Stabilire se la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile nell'origine.

Sol.: Abbiamo

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin|h| - |h|}{h|h|} = 0$$

e per simmetria

$$f_y(0,0) = 0$$

Per la differenziabilità dobbiamo quindi verificare se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Ma

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{h^2+k^2} - \sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2} =|_{t=\sqrt{h^2+k^2}} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$$

Dunque f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 16: Stabilire se in $(0,0)$ risulta continua, derivabile o differenziabile la funzione definita da $f(0,0) = 0$ e, per $(x,y) \neq (0,0)$, da:

$$(a) f(x,y) = \frac{1-\cos xy}{x^2+y^2} \qquad\qquad (b) f(x,y) = x\log\frac{x^2+3y^2}{x^2+y^2}$$

Sol.: (a): possiamo scrivere

$$f(x,y) = \frac{1-\cos xy}{(xy)^2}\frac{(xy)^2}{x^2+y^2} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Dunque f è continua nell'origine. Per un ragionamento del tutto analogo a quello dell'esercizio 10 f è anche derivabile e le sue derivate parziali in $(0,0)$ sono nulle. D'altra parte

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1-\cos hk}{(\sqrt{h^2+k^2})^3} = \frac{1}{2} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^2}{(\sqrt{h^2+k^2})^3} = 0$$

da cui segue che f è anche differenziabile.

(b): abbiamo

$$|f(x,y)| = \left| x\log(1+\frac{2y^2}{x^2+y^2}) \right| \leq |y\frac{2xy}{x^2+y^2}| \leq |y|$$

Pertanto f è continua nell'origine. Inoltre f è nulla sugli assi coordinati da cui

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

Tuttavia

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} h\frac{\log \frac{h^2+3k^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

e tale limite non esiste (ciò si può vedere ad esempio sulle rette $k = mh$). Ne segue che f non è differenziabile.