AM2: Tracce delle lezioni- X Settimana

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f \in C^1(O)$. Se f_x, f_y sono a loro volta derivabili, allora

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} := \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} := \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f_{yy} := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

sono le derivate seconde. Se $f_x, f_y \in C^1(O)$, f si dice di classe $C^2(O)$.

Lemma di Schwartz

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad f_{xy} = f_{yx}$$

MATRICE HESSIANA

Sia $f \in C^2(O)$ ed indichiamo con $u = (x_1, x_2)$ i punti di $\mathbf{R}^2$. La matrice 2×2 delle derivate seconde

$$H_f(u) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(u)\right)_{i,j=1,2}$$

é detta matrice Hessiana .

Dal Lemma di Schwartz: H_f é **matrice simmetrica**.

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) = f(u) + \, < \nabla f(u)\,,\, h > \, + \frac{1}{2} < H_f(u)\,h,\ h > \, + \circ\,(||h||^2)$$

Prova. Indichiamo con x_1, x_2 le variabili, $h = (h_1, h_2)$. Posto $\varphi(t) := f(u+th)$, é

$$\varphi(0) = f(u),\ \varphi(1) = f(u+th), \qquad \tfrac{d\varphi}{dt}(u+th) = \sum_{i=1}^{2} \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(u+th)h_i$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(u+th) = \sum_{i=1}^{2} \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i}(u+th)h_i = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j =$$

$$= < H_f(u + t\,h)\, h,\ h >$$

Basta quindi sostituire in $\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$ per ottenere

$$f(u+h) = f(u) + < \nabla f(u)\,,\ h > + \frac{1}{2} < H_f(u)h, h > +$$

$$\int_0^1 (1-t) < [H_f(u+th) - H_f(u)]h, h > dt.$$

La stima del resto segue da

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0 :\ |t| \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow\ |f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)| \le \epsilon \ \Rightarrow$$

$$\Big| \sum_{i,j=1}^{2} \Big[f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u) \Big] h_i h_j \Big| \le 2\epsilon ||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

NOMENCLATURA. Sia $f \in C^1(D_r(u_0))$

(i) $u \in D_r(u_0)$ é **critico** o **stazionario** per f se $\nabla f(u) = 0$

(ii) $u \in D_r(u_0)$ é punto di **minimo locale libero (massimo locale libero)**

se $f(u) \le f(v)$ $\quad (f(u) \ge f(v))$ $\quad \forall v \in D_\delta(u)$

Punti di minimo (massimo) locale libero **min-l-l/max-l-l** sono stazionari:

Min/max: condizioni necessarie

Sia $f \in C^1(D_r(u_0)),\ \ u \in D_r(u_0)$ **min-l-l (max-l-l)**

(i) allora $\nabla f(u) \,=\, 0$

(ii) Se $f \in C^2$, allora $< H_f(u)\, h,\ h > \geq\ 0 \quad (\leq 0) \quad \forall h \in \mathbf{R}^2$

Prova. (i) Se u é punto di minimo, allora

$\forall h,\ t \to f(u+th)$ ha un punto di minimo in $t=0$ e quindi

$0 = \frac{d}{dt} f(u+th)_{|t=0} =< \nabla f(u), h > \quad \forall h \in \mathbf{R}^2 : \quad \nabla f(u) = 0.$

(ii) Sia u punto di minimo. Allora $\nabla f(u) = 0$ e la formula di Taylor dá

$$0 \,\leq\, f(u+h) - f(u) \,=\, ||h||^2\, [< \nabla f(u)\, \frac{h}{||h||},\ \frac{h}{||h||} > \,+\, \circ\,(1)]$$

e quindi $< \nabla f(u)\, \frac{h}{||h||},\ \frac{h}{||h||} \ > \geq\ 0.$ Analogamente se u é massimo locale.

Min/max: una condizioni sufficente

Sia $f \in C^2(D_r(u_0)),\ u \in D_r(u_0),\ \nabla f(u) = 0$:

(i) $< H_f(u)\, h, h >> 0\ \ \forall h \in \mathbf{R}^2,\ h \neq 0, \quad \Rightarrow\ u$ é punto di minimo locale (stretto: $f(u) < f(v)\ \ \forall v \neq u$ vicino a u).

(ii) $< H_f(u)\, h, h >< 0\ \ \forall h \in \mathbf{R}^2,\ h \neq 0, \quad \Rightarrow\ u$ é punto di massimo locale (stretto: $f(u) > f(v)\ \ \forall v \neq u$ vicino a u).

Prova. $h \to< H_f(u)\, h, h >$ continua, $< H_f(u)\, h, h >> 0\ \ \forall h \in \mathbf{R}^2,\ h \neq 0,\ \Rightarrow$

$$\exists\, m :=\ \min_{\|h\|=1} < H_f(u)\, h, h >>\ 0$$

Quindi, $< H_f(u)\, h, h > \geq\ m\, \|h\|^2\ \ \forall h \in \mathbf{R}^2.$

Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $0 < \|h\| << 1 \ \Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u)\ = \|h\|^2\, [< \nabla f(u)\, \frac{h}{\|h\|},\ \frac{h}{\|h\|} > \,+\, \circ\,(1)]\ \geq \|h\|^2\, [m\ +\ \circ(1)]\ >\ 0$$

APPENDICE A1: Prova del Lemma di Schwartz

Sia $D_r(x_0, y_0) \subset O$, $\delta << r$, $R_\delta := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$. Si ha:

$$\frac{1}{4\delta^2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left(\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy \right) dx = \frac{1}{4\delta^2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} [\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0+\delta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0-\delta)]\, dx =$$

$$\frac{1}{4\delta^2} [f(x_0+\delta, y_0+\delta) - f(x_0-\delta, y_0+\delta) - f(x_0+\delta, y_0-\delta) + f(x_0-\delta, y_0-\delta)] =$$

$$= \frac{1}{4\delta^2} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} [\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\delta, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0-\delta, y)]\, dy = \frac{1}{4\delta^2} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx \right) dy$$

Applicando due volte il teorema della media, otteniamo

$$\exists (x_\delta, y_\delta) \in R_\delta : \frac{1}{4\delta^2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left(\int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy \right) dx = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x_\delta, y_\delta)$$

$$\exists (x^\delta, y^\delta) \in R_\delta : \frac{1}{4\delta^2} \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left(\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx \right) dy = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x^\delta, y^\delta)$$

Mandando δ a zero, $(x_\delta, y_\delta), (x^\delta, y^\delta)$ vanno a (x_0, y_0) e quindi $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

APPENDICE A2: Equazioni di Cauchy-Riemann e funzioni armoniche

$f(x+iy) = u(x,y) + i\, v(x,y)$ è olmorfa $\Leftrightarrow$ $u, v \in C^1$, e $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\Rightarrow$: $f'(z) = a + ib$ $\Rightarrow$ $u(x+s, y+t) + i\, v(x+s, y+t) = u(x,y) + i\, v(x,y) + (a+ib)(s+it) + \circ(|s|+|t|)$ $\Rightarrow$ $u(x+s, y+t) = u(x,y) + as - bt + \circ(|s|+|t|)$, $v(x+s, y+t) = v(x,y) + bs + at + \circ(|s|+|t|)$ $\Rightarrow$ $a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $b = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$.
$\Leftarrow$: $u(x+s, y+t) = u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}s + \frac{\partial u}{\partial y}t + \circ(|s|+|t|)$, $v(x+s, y+t) = v(x,y) + \frac{\partial v}{\partial x}s + \frac{\partial v}{\partial y}t + \circ(|s|+|t|)$ $\Rightarrow$ $u(x+s, y+t) + i\, v(x+s, y+t) = u(x,y) + i\, v(x,y) + (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})s + (\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y})\, it$. Ma $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ $\Rightarrow$ $u(x+s, y+t) + iv(x+s, y+t) = u(x,y) + iv(x,y) + (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(s+it) + \circ(|s|+|t|)$ $\Rightarrow$ f é derivabile e $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$.

In particolare se $f(z) = u + iv$ e $u, v \in C^2$, dalle equazioni di Cauchy-Riemann e dal Lemma di Schwartz segue $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ (u, v sono **armoniche**).

APPENDICE A3: Forme quadratiche

La natura di un punto stazionario $u = (x_1, x_2)$ di f dipende dalle proprietá di segno della forma quadratica associata alla matrice Hessiana

$$< H_f(u)\, h,\ h > \;=\; \sum_{ij=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u)\, h_i\, h_j \;=$$

$$= \; f_{x_1x_1}(u)\, h_1^2 \;+\; 2f_{x_1x_2}(u)\, h_1\, h_2 \;+\; f_{x_2x_2}(u)\, h_2^2 \qquad\qquad h = (h_1, h_2)$$

Ora, $H_f(u)$ simmetrica $\Rightarrow$ $H_f(u)$ ha autovalori reali, diciamo $\lambda_1 \le \lambda_2$. Le proprietá di segno della forma quadratica associata sono legate al segno degli autovalori. Diamo qui una dimostrazione analitica di questo fatto.

Sia $\mathcal{A}=(a_{ij})_{ij=1,2}=\mathcal{A}^{\,t}$ matrice 2×2 simmetrica. La forma quadratica associata

$$< \mathcal{A}\ \ h,\ h > := \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\, h_i\, h_j, \qquad h = (h_1, h_2) \in \mathbf{R}^2 \qquad\qquad \text{si dice}$$

definita positiva (negativa) se $\;< \mathcal{A}\ \ h,\ h > > \ 0\,(< 0),\ \ \forall\, h \neq (0,0)$

semidefinita positiva (negativa) se $\;< \mathcal{A}\ \ h,\ h > \ge \ 0\,(\le 0),\ \ \forall\, h \in \mathbf{R}^2$

Proposizione Sia $\mathcal{A} = (a_{ij})$ matrice simmetrica 2×2, $\lambda_1 \le \lambda_2$ i suoi autovalori. Sia $a(h) :=< \mathcal{A}\ h, h >,\ \ h \in \mathbf{R}^2$. Allora

$$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} a(h), \qquad\qquad \lambda_2 = \sup_{\|h\|=1} a(h)$$

Prova. $m := a(\underline{h}) = \min_{\|h\|=1} a(h) \le \frac{a(h)}{\|h\|^2}\ \forall h \in \mathbf{R}^2, h \neq 0 \ \Rightarrow\ 0 = \left(\frac{d}{dt}\ \frac{a(\underline{h}+tk)}{\|\underline{h}+tk\|^2}\right)_{|t=0} =$

$$2[< \mathcal{A}\ \underline{h}, k > \,-\, < \mathcal{A}\ \underline{h}, \underline{h} >< \underline{h}, k\ >] \;=\; 2[< \mathcal{A}\ \underline{h}, k > \,-m\, < \underline{h}, k\ >]\ \ \forall\, k \in \mathbf{R}^2$$

Dunque $\mathcal{A}\ \underline{h} \;=\; m\, \underline{h}$, cioé m é un autovalore di $\mathcal{A}$, necessariamente il piú piccolo, giacché $\mathcal{A}\ h = \lambda h,\ ||h|| = 1 \ \Rightarrow\ \lambda \,=< \mathcal{A}\ h, h > \ge\ m.$

Corollario

(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 > 0\ \ (\lambda_2 < 0)$

(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 = 0\ \ (\lambda_2 = 0)$