V ESERCITAZIONE DI AM1B

1. Calcolo di limiti di successioni

Esempio 1.1. Siano $x_n \to \infty$, $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n+\alpha}{x_n}\right)^{x_n k} = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{\alpha}{x_n}\right)^{x_n}\right)^{k} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x_n}{\alpha}}\right)^{\frac{x_n}{\alpha}}\right)^{\alpha k} = e^{\alpha k}$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzato il limite notevole $\to \frac{1}{e}$ ed il teorema ponte applicato alla funzione continua $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Ad esempio si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} = \sqrt{e}$$

Esempio 1.2.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^3-1)\sin\frac{5}{n}}{n^3-17n^2+15}\left(\frac{n-4}{n}\right)^{n} n =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-1}{n^3-17n^2+15}\cdot\frac{\sin\frac{5}{n}}{\frac{5}{n}}\cdot 5(1-\frac{4}{n})^n = 5e^{-4}$$

Esempio 1.3.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan^2(\frac{1}{n})}{1-\cos\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\cos^2\frac{1}{n}}\frac{1}{1-\cos\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2}\frac{(\frac{1}{n})^2}{1-\cos\frac{1}{n}}\frac{1}{\cos^2\frac{1}{n}} = 2$$

Esempio 1.4. Sia $a \neq 0$, vogliamo dimostrare che $\lim_{n\to+\infty}(\cos(\frac{a}{n}))^n = 1$.

$$(\cos(\frac{a}{n}))^n = ((\cos\frac{a}{n}-1)+1)^n = \left(\frac{\cos(\frac{a}{n})-1}{-\frac{a}{n}^2}(-(\frac{a}{n})^2)+1\right)^n =$$

$$(-\frac{a^2}{2n^2}+1)^n = ((-\frac{a^2}{2n^2}+1)^{n^2})^{\frac{1}{n}}$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty}(-\frac{a^2}{2n^2}+1)^{n^2} = e^{-\frac{a^2}{2}}$$

segue la tesi (infatti $(e^{-\frac{a^2}{2}})^{\frac{1}{n}} \to 1$).

2. Successioni per riccorrenza

Esempio 2.1.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\pi}{2} \\ a_{n+1} = \sin a_n \end{cases}$$

Osserviamo che, se $x > 0$, $0 \leq \sin x < x$. Proviamo per induzione che $0 < a_n \leq \frac{\pi}{2}$. Poichè la base induttiva è immediatamente verificata, supponiamo vero il risultato per n e proviamolo per $n+1$. Si ha

$$0 < a_{n+1} = \sin(a_n) < 1 < \frac{\pi}{2}$$

Inoltre $a_{n+1} = \sin a_n < a_n$ perchè $0 < a_n$. La successione risulta quindi decrescente e limitata dal basso e dunque ammette limite. Poichè $\sin a_n = a_{n+1}$, calcolando il limite ad entrambi i membri, si ha che

$$l = \sin l \Rightarrow l = 0$$

Esempio 2.2.

$$\begin{cases} a_{n+1} = (a_n)^{a_{n-1}} \quad n \geq 2 \\ a_0, a_1 \in (0,1) \end{cases}$$

Si dimostra per induzione che $a_n > 0 \forall n$; infatti la base induttiva è chiaramente verificata. Supposta vera l'asserzione per n proviamola per $n+1$. Si ha che

$$a_{n+1} = (a_n)^{a_{n-1}} > 0$$

Analogamente, procedendo ancora per induzione, si verifica che $a_n < 1 \forall n$ (infatti $a_{n+1} = (a_n)^{a_{n-1}} < 1$ se a_n e a_{n-1} sono entrambi minori di 1). Osserviamo che la successione è crescente: essendo infatti $a_n < 1$, si ha che

$$a_{n+1} = a_n^{a_{n-1}} > a_n$$

Passando al limite per entrambi i membri, otteniamo allora

$$l = l^l \Rightarrow e^{\ln l} = e^{l \ln l} \Rightarrow \ln l = l \ln l \Rightarrow (\ln l)(l-1) = 0 \Rightarrow l = 1$$

Esempio 2.3.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{\pi}{4} \\ a_{n+1} = a_n^{\sin a_n} \end{cases}$$

Si osservi che, se $x > 1$, allora $x^{\sin x} \leq x$, mentre se $0 \leq x \leq 1$, $x^{\sin x} \geq x$. Dimostriamo per induzione che $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni n. La base induttiva è chiaramente verificata. Supponiamo $0 \leq a_n \leq 1$. Allora

$$a_{n+1} = a_n^{\sin a_n} \leq 1$$

Si ha quindi $0 \leq \sin a_n \leq \sin 1$ per ogni n. La successione risulta inoltre crescente: $a_{n+1} = a_n^{\sin a_n} \geq a_n$ perché $0 \leq a_n \leq 1$ e $0 \leq \sin a_n \leq 1$. Passando al limite per entrambi i membri, si ha

$$l = l^{\sin l} \Rightarrow e^{\ln l} = e^{\sin l \ln l} \Rightarrow \ln l = \sin l \ln l \Rightarrow l = 1.$$

Osservazione 2.4. $\sin l = 1$ non è soddisfatta nel dominio considerato.

3. Limiti di funzioni

Esempio 3.1.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^3}\frac{(\cos x-1)}{\cos^2 x}(x^4-1)\right)=\frac{1}{2}$$

Il risultato segue dal fatto che

$$\frac{\sin x}{x}\to 1 \quad \frac{\cos x-1}{x^2}\to -\frac{1}{2} \quad \frac{x^4-1}{\cos^2 x}\to -1$$

Esempio 3.2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sin^2 x\ln x)=+\infty$$

infatti $(x-\sin^2 x\ln x)=x(1-\frac{\sin^2 x\ln x}{x})$ e

$$\frac{\sin^2 x\ln x}{x}\to 0.$$

Esempio 3.3.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln|x|+\arctan|x|}{x-1}\sin^2(x-1)\right)=0$$

E' sufficiente osservare che $\ln|x|\to 0 \quad \arctan|x|\to\frac{\pi}{4}$ e

$$\frac{\sin^2(x-1)}{x-1}=\frac{\sin(x-1)}{x-1}\sin(x-1)\to 0$$

Esempio 3.4. Sia

$$f(x)=\begin{cases}2x+2 & \text{se } x<0,\\ 0 & \text{se } x=0,\\ \ln x & \text{se } 0<x\le 1,\\ \frac{1}{x-1} & \text{se } x>1.\end{cases}$$

Calcoliamo i seguenti limiti.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 2x+2=2;\\
&\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty;\\
&\lim_{x\to 1^-} f(x)=\ln x=0;\\
&\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty;\\
&\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\ln x=0;\\
&\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} 2x+2=-\infty;\\
&\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty \frac{1}{x-1}}=0.
\end{aligned}$$

Osserviamo che la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ tranne che in 0 ed 1.

4. Estremi inferiori e superiori

Esempio 4.1. Sia $a_n = \frac{2n \sin \frac{1}{n}}{n^2+1} > 0$.

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 1 \geq \sin \frac{1}{n} > 0$$

Quindi $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \Rightarrow \inf a_n = \min a_n = 0$.

Osserviamo che

$$\frac{2n}{n^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow 2n \leq n^2 + 1 \Leftrightarrow n^2 + 1 - 2n \geq 0 \Leftrightarrow (n-1)^2 \geq 0.$$

Quindi

$$\frac{2n}{n^2+1} \leq 1 \quad \forall n$$

Perciò

$$\frac{2n \sin \frac{1}{n}}{n^2+1} \leq \sin 1 \quad \forall n$$

D'altra parte se $n = 1$, $a_1 = \sin 1 \Rightarrow \sup a_n = \max a_n = \sin 1$.

Esempio 4.2. Siano $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = (-1)^n a^{-n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$, con $a \geq 1$.

$$F = \{a^{-2k}, k \geq 1\} \text{ e } G = \{-a^{-2k-1}, k \geq 1\}.$$

Osserviamo che $E = F \cup G$. Gli elemmenti di F sono positivi mentre quelli di G sono negativi. Sicché

$$\inf E = \inf G = -\frac{1}{a^2} \quad \text{e} \quad \sup E = \sup F = \frac{1}{a^2}$$